

## F Weitere Anwendungen von Begriffen, Sätzen und Verfahren der Analysis beim Lösen inner- und außermathematischer Probleme

Die Palette der Anwendungsgebiete der Analysis ist außerordentlich breit. Ihre Begriffe, Sätze und Verfahren werden sowohl in den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik selbst als auch in den Naturwissenschaften, in der Technik, in der Ökonomie u. a. vielfältig genutzt, wobei man einfache Probleme auch bereits mit Mitteln der Schulmathematik lösen kann. Folgendes Beispiel aus der Integralrechnung soll dies illustrieren:

100 Jahre nach dem Aufstieg des ersten Zeppelins LZ 1 in Friedrichshafen erhob sich am 13. Juli 2000 sein hochmoderner Nachkomme, der NT LZ N07, in die Lüfte – und nach fast sechzig Jahren begann 1999 in Deutschland auch wieder der Bau von Luftschiffen als Transportmittel, wobei modernste Technik eingesetzt wird. Die Gründe für die Wiedergeburt der Giganten der Lüfte liegen in den positiven Eigenschaften der Luftschiffe. Dazu gehören die Möglichkeit, senkrecht zu starten und auf kleinstem Raum zu landen, der geringe Kraftstoffverbrauch und damit die extrem lange Flugdauer ohne Nachtanken und das ruhige Gleiten in der Luft. Viele Güter, die für konventionelle Transportmittel zu groß oder zu schwer sind, können mit Luftschiffen befördert werden. Durch den Einsatz der „Leichter-als-Luft“-Technologie ist die zu transportierenden Gesamtlast fast „schwerelos“ und der erforderliche Energieaufwand für den Transport daher gering: Ein Kubikmeter des als Luftschiff-Füllung verwendeten nicht brennbaren Heliums trägt rd. 1 Kilogramm Last und verbraucht sich dabei nicht. Außerdem bleibt das Luftschiff im Gegensatz zum Flugzeug selbst bei abgeschalteten Motoren in der Luft.

In der Nähe von Berlin ist in den letzten Jahren eine Werft entstanden, die Luftschiffe von 260m Länge und 65m Durchmesser bauen und warten wird. Diese Luftschiffe können bis zu 160 t Nutzlast befördern, die in einem Container von  $50\text{ m} \times 8\text{ m} \times 8\text{ m}$  Aufnahme finden. Die Fluggeschwindigkeit beträgt dabei 80 bis  $135 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , die Flughöhe bis zu 2 000 m und die Reichweite bis 10 000 km. Es soll näherungsweise das Volumen eines solchen Luftschiffs berechnet werden (s. Beispiel F 23).



## F 1 Beschreiben von Prozessen und Zusammenhängen durch Funktionen

### F 1.1 Approximation durch Polynomfunktionen

Für das Arbeiten in vielen Bereichen der Mathematik und demzufolge auch im Mathematik- und speziell im Analysisunterricht ist das Ermitteln „exakter“, „genau“ bestimmter Resultate kennzeichnend: Mithilfe äquivalenter Umformungen oder geeigneter Formeln bestimmt man so z. B. Lösungen von linearen oder quadratischen Gleichungen bzw. Nullstellen entsprechender Funktionen, man führt Termwertberechnungen durch, um etwa die Werte einer rationalen Funktion bei bekannten Argumenten zu ermitteln, es sind Zahlenpaare zu berechnen, die als Koordinaten von Punkten auf dem Graphen einer durch ihre Gleichung gegebenen Funktion in Frage kommen usw.

Bei vielen Anwendungen der Mathematik ist man nun aber gerade darauf angewiesen, möglichst gute, dem jeweiligen Verwendungszweck genügende *Näherungslösungen* für das zugrunde liegende mathematische Problem zu finden bzw. zu nutzen, da ein Verfahren zur Ermittlung „genauer“ Resultate (noch) nicht zur Verfügung steht, seine Verwendung zu aufwändig wäre u. Ä.

So kann es sich beispielsweise als erforderlich erweisen, rationale Gleichungen höheren Grades ( $n > 2$ ) durch Probieren, auf grafischem Wege oder durch Nutzen spezieller Verfahren „näherungsweise“ zu lösen (vgl. Kap. F 2). Oftmals sind auch Funktionen (insbesondere nichtrationale Funktionen) durch andere (einfachere) Funktionen (in der Regel ganzrationale Funktionen) zu ersetzen, welche die gegebenen Funktionen möglichst gut annähern (sie möglichst gut *approximieren*<sup>1)</sup>) und deren Graphen dann mit denen der Ausgangsfunktion möglichst gut übereinstimmen. Das ist zum Beispiel der Fall, wenn man Werte von Funktionen zumindest näherungsweise ermitteln will, die man durch bloßes Einsetzen in die gegebene Funktionsgleichung nicht berechnen kann (z. B.  $f_1(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $f_2(x) = 2,5^x$ ,  $f_3(x) = \sin x$ ), oder wenn man Werte bestimmter nichtrationaler Funktionen mit einer höheren Genauigkeit benötigt, als dies die vorhandenen Tafelwerke gestatten.

Viele praktische, insbesondere technische und naturwissenschaftliche Probleme verlangen eine etwas andere Art von Approximation, und zwar dann, wenn in Versuchsreihen, Untersuchungen oder Experimenten Messwertpaare ermittelt wurden und die Frage zu beantworten ist, ob es eine Funktion gibt, die den vorliegenden Sachverhalt näherungsweise beschreibt, deren Gleichung also von den Wertepaaren hinreichend gut erfüllt wird. In Abhängigkeit von den Bedingungen und „Gütekriterien“ einer Approximation unterscheidet man im letztgenannten Fall verschiedene Verfahren:

Soll die Näherungsfunktion mit der betrachteten Funktion in einer Reihe von Stützstellen und Stützwerten (Punkten) übereinstimmen, dann spricht man von *Interpolation*<sup>2)</sup>. Verlangt man, dass die Näherungsfunktion und die Ausgangsfunktion in der Umgebung einer Stelle  $x_0$  möglichst gut übereinstimmen, dann kann man das Problem mithilfe der *TAYLORSchen*<sup>3)</sup> Formel lösen. Ist schließlich für viele Messpunkte (eine „Punktwolke“) eine Funktion gesucht, die den Zusammenhang zwischen den vorliegenden Größen näherungsweise beschreibt, dann führt das zur *Regression*<sup>4)</sup>.

Auf alle drei Verfahren wird im Folgenden eingegangen, wobei der Schwerpunkt auf der Approximation von Funktionen mithilfe der TAYLORSchen Formel liegt.

1) approximare (lat.) – sich annähern

2) interpolare (lat.) – (eigentlich:) zurichten, umgestalten

3) Brook Taylor (1685–1731); englischer Mathematiker

4) regressio (lat.) – Rückgang

Als ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades bezeichnet man eine Funktion  $f$ , die durch eine Gleichung der Form  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) dargestellt werden kann. Die Koeffizienten  $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_1, a_0$  sind reelle Zahlen mit  $a_n \neq 0$ . Da ein Term der Form  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0$  ein **Polynom  $n$ -ten Grades** genannt wird, bezeichnet man die ganzrationale Funktion  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$  auch als **Polynomfunktion vom Grade  $n$** . Es gilt also: Lässt sich eine rationale Funktion  $f$  als Polynom darstellen, dann ist  $f$  ganzrational.

Die Darstellung einer ganzrationalen Funktion durch ein Polynom ist eindeutig, denn die Annahme, dass zwei voneinander verschiedene Polynome dieselbe ganzrationale Funktion darstellen können, führt auf einen Widerspruch (vgl. Aufgabe F 1). Des Weiteren lässt sich eine ganzrationale Funktion  $f$  mit der Nullstelle  $x_0$  (vgl. Satz A 1) in ein Produkt  $f(x) = (x - x_0) f_R(x)$  aus dem Linearfaktor  $(x - x_0)$  und der Restfunktion  $f_R$  zerlegen.  $f_R$  ist dann eine ganzrationale Funktion vom Grade  $(n - 1)$ . Daraus ergibt sich folgende Vermutung:

**Satz F 1: Nullstellenanzahl für ganzrationale Funktionen**

F 1

Eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion)  $n$ -ten Grades besitzt im Bereich der reellen Zahlen höchstens  $n$  verschiedene Nullstellen.

*Beweis durch vollständige Induktion:*

*I. Induktionsanfang:*

**A(1):** Für  $n = 1$ , d. h. für das Polynom  $a_1 \cdot x + a_0$  mit  $a_1 \neq 0$ , gilt der Satz, denn dieses Polynom hat (genau) eine Nullstelle  $x_0 = -\frac{a_0}{a_1}$ .

*II. Induktionsschluss:*

Induktionsvoraussetzung:

**A(k):** Die Polynomfunktion  $g(x)$  vom Grade  $k$  hat höchstens  $k$  verschiedene Nullstellen.

Induktionsbehauptung:

**A(k + 1):** Ist  $f(x)$  ein Polynom vom Grade  $(k + 1)$ , dann besitzt  $f(x)$  höchstens  $(k + 1)$  verschiedene Nullstellen.

Induktionsbeweis:

Es sei  $x_0$  eine Nullstelle des Polynoms  $f(x)$  vom Grade  $(k + 1)$ . Dann gibt es nach Satz A 1 eine Produktdarstellung der Form  $f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$ , wobei  $g(x)$  nur noch den Grad  $k$  hat. Das Produkt  $(x - x_0) \cdot g(x)$  ist gleich 0, wenn wenigstens ein Faktor 0 wird. Der erste Faktor wird 0 für  $x = x_0$ , der zweite Faktor  $g(x)$  nimmt nach Induktionsvoraussetzung für höchstens  $k$  weitere Werte von  $x$  den Wert 0 an. Also wird das Produkt und damit  $f(x)$  für höchstens  $(k + 1)$  verschiedene Werte gleich 0.

Wegen  $A(1)$  und  $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$  gilt die Behauptung für alle  $n \in \mathbb{N}$ . w.z.b.w.

Für die nachfolgenden Betrachtungen ist bedeutsam (und sei ohne Beweis mitgeteilt):

**Satz F 2:**

F 2

Eine ganzrationale Funktion (Polynomfunktion)  $n$ -ten Grades ist durch  $(n + 1)$  geordnete Paare  $(x_i; f(x_i))$  eindeutig bestimmt.

## F 1

## Beispiel F 1:

Der Graph einer ganzrationalen Funktion 3. Grades verlaufe durch die Punkte  $P_1(1; -17)$ ,  $P_2(0; 3)$ ,  $P_3(-1; 29)$  und  $P_4(2; -25)$ . Die Funktionsgleichung ist zu bestimmen.

Die Gleichung einer **Polynomfunktion** 3. Grades in allgemeiner Form lautet:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Einsetzen der gegebenen Wertepaare  $(x_i; f(x_i))$  führt auf das zu lösende Gleichungssystem:

$$(I) \quad -17 = a_3 + a_2 + a_1 + a_0$$

$$(II) \quad 3 = a_0$$

$$(III) \quad 29 = -a_3 + a_2 - a_1 + a_0$$

$$(IV) \quad -25 = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0$$

Das Gleichungssystem wird schrittweise gelöst. Unmittelbar ergibt sich  $a_0 = 3$ . Addition von (I) und (III) führt auf  $12 = 2a_2 + 2a_0$ . Damit ist  $a_2 = 3$ .

Durch Multiplikation von (III) mit 2 und Addition der neu entstandenen Gleichung zu (IV) erhält man:  $33 = 6a_3 + 6a_2 + 3a_0$  bzw.  $33 = 6a_3 + 27$  und somit  $a_3 = 1$ .

Aus (I) folgt

$$-17 = 1 + 3 + a_1 + 3 \text{ bzw. } a_1 = -24.$$

Damit sind die Koeffizienten  $a_3$ ,  $a_2$ ,  $a_1$  und  $a_0$  bestimmt. Die gesuchte Funktionsgleichung lautet

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 3.$$

Fig. F 1 zeigt die Lösung des Gleichungssystems mit GTA.

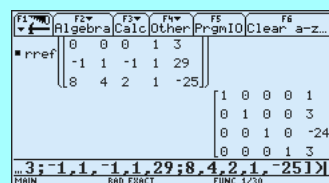


Fig. F 1

Geometrisch bedeutet der Satz F 2, dass durch  $(n + 1)$  Punkte mit verschiedenen Abszissen genau eine Parabel<sup>1)</sup>  $n$ -ter Ordnung festgelegt ist. Daraus ergibt sich eine wichtige Anwendung:

Häufig sind von einer beliebigen Funktion nur die Werte an bestimmten Stellen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , den sogenannten **Stützstellen**, bekannt. Die entsprechenden Funktionswerte  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  werden demzufolge **Stützwerte** genannt. Die Aufgabe besteht nun darin, für eine beliebige Stelle  $x$ , die zwischen zwei benachbarten Stützstellen liegt, den Funktionswert  $f(x)$  zu berechnen. Ist die exakte Berechnung von  $f(x)$  mit elementaren Mitteln nicht möglich oder mit einem übermäßigen Rechenaufwand verbunden, so versucht man den Funktionswert  $f(x)$  näherungsweise zu bestimmen (ihn zu approximieren). Ein solches Verfahren wird schlechthin als **Interpolation** bezeichnet.

Allgemein geht es bei der Interpolation darum, *Näherungsfunktionen* zu finden, die an den Stützstellen  $x_i$  genau die Stützwerte  $f(x_i)$  annehmen. Da Polynome einerseits die einfachsten Funktionsterme sind und andererseits sich jede stetige Funktion beliebig gut durch Polynome annähern lässt, versucht man die Funktion  $f(x)$  durch ein Polynom zu **approximieren**.

Das einfachste Interpolationsverfahren ist die sogenannte **lineare Interpolation**. Man benötigt dazu nur zwei Stützstellen  $x_1$  und  $x_2$  mit den Stützwerten  $f(x_1)$  und  $f(x_2)$ . Bei diesem Verfahren wird die Funktion  $f(x)$  durch eine lineare Funktion ersetzt, deren Graph durch die Punkte  $(x_1; f(x_1))$  und  $(x_2; f(x_2))$  verläuft (Fig. F 2). Die lineare Interpolation bildet die Grundlage des Ablesens von Zwischenwerten in Tafelwerken, z.B. bei Winkelfunktionen oder Logarithmen.

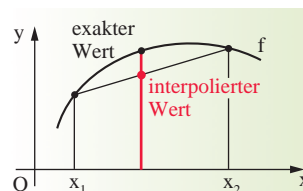


Fig. F 2

<sup>1)</sup> Mit *Parabel* bezeichnet man allgemein die Graphen ganzrationaler Funktionen.

Entsprechend den obigen Ausführungen lautet die **Grundaufgabe der Interpolation** (im engeren Sinn)<sup>1)</sup>:

*Man bestimme ein möglichst einfaches Polynom, das an den Stützstellen die Stützwerte annimmt.*

Dieses Interpolationspolynom wählt man als Näherungsfunktion für die Funktion  $f$ . Zu seiner Bestimmung gibt es verschiedene Methoden, die aber alle wegen der Eindeutigkeit der Polynomdarstellung (vgl. Aufgabe F 1) zu demselben Polynom führen. Eine mögliche Methode ist der im Beispiel F 1 demonstrierte **Polynomansatz**:

Man setzt das Polynom in der allgemeinen Form  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  mit den unbestimmten Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$  an und fordert, dass der zugehörige Graph durch die  $(n+1)$  Punkte mit den Koordinaten  $(x_i; f(x_i))$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) verläuft. Damit erhält man  $(n+1)$  Gleichungen zum Bestimmen der Koeffizienten  $a_0, a_1, \dots, a_n$ :

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_n \cdot x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_0 + a_0 \\ f(x_1) &= a_n \cdot x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + a_1 \cdot x_1 + a_0 \\ &\vdots \\ f(x_n) &= a_n \cdot x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + a_1 x_n + a_0 \end{aligned}$$

Wenn alle Stützstellen  $x_i$  voneinander verschieden sind, dann ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar.

#### Beispiel F 2:

Die nichtrationale Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \geq 0$ , ist durch ein Polynom 2. Grades zu approximieren, das durch die Punkte  $P_1(1; 1)$ ,  $P_2(1,21; 1,1)$  und  $P_3(1,44; 1,2)$  verläuft.

Der **Polynomansatz**  $p(x) = a_2 \cdot x^2 + a_1 x + a_0$  liefert mit

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 1 &= a_2 + a_1 + a_0 \\ \text{(II)} \quad 1,1 &= 1,4641 a_2 + 1,21 a_1 + a_0 \\ \text{(III)} \quad 1,2 &= 2,0736 a_2 + 1,44 a_1 + a_0 \end{aligned}$$

den Koordinaten der gegebenen Punkte das Gleichungssystem:

Dieses Gleichungssystem besitzt (gerundet) die Lösung  $a_2 = -0,0941$ ,  $a_1 = 0,6842$  sowie  $a_0 = 0,4099$  (Fig. F 3). Das Näherungspolynom  $p$  für  $f(x) = \sqrt{x}$  hat demzufolge die Gestalt  $p(x) = -0,0941 x^2 + 0,6842 x + 0,4099$ . Die näherungsweise Berechnung des Funktionswerts z.B. an der Stelle  $x_1 = 1,3$  ergibt  $\sqrt{1,3} \approx 1,1403$  – der Taschenrechnerwert für  $\sqrt{1,3}$  ist mit 1,14018 geringfügig kleiner. Bereits für  $x_2 = 2$  und mehr noch für den außerhalb des eingangs vorgegebenen „Stützstellenbereichs“ liegenden Wert  $x_3 = 3$  ist die Differenz zu den Taschenrechnerwerten jedoch schon wesentlich größer (Fig. F 4). Auch Fig. F 5 zeigt, dass die Graphen von  $f$  und  $p$  etwa für  $[1; 1,4]$  gut übereinstimmen, dann aber schnell „auseinanderlaufen“.

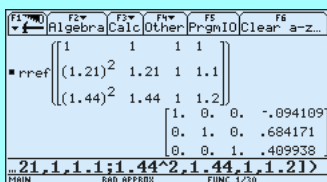


Fig. F 3

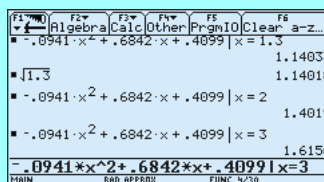


Fig. F 4

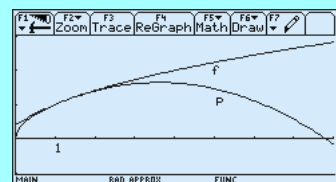


Fig. F 5

F 2

<sup>1)</sup> Von *Interpolation im weiteren Sinne* spricht man, wenn die Näherungsfunktionen, die eine Funktion  $f(x)$  möglichst gut approximieren, im Allgemeinen nicht exakt durch die Punkte verlaufen, die durch die bekannten Stützstellen und Stützwerte festgelegt sind.

## F 3

## Beispiel F 3:

Die Sinusfunktion  $f(x) = \sin x$  ist im Intervall  $[0; \frac{\pi}{2}]$  durch ein **Polynom 5. Grades** anzunähern.

Die Stützstellen seien  $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}$  und  $\frac{\pi}{2}$ .

Da die Sinusfunktion eine ungerade Funktion ist, kann sie nur durch Polynome angenähert werden, die ausschließlich ungerade Potenzen von  $x$  enthalten. Wir setzen daher an:

$$p(x) = a_5 \cdot x^5 + a_3 \cdot x^3 + a_1 \cdot x.$$

Mit  $f(0) = 0$ ,  $f(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2}$ ,  $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$  und  $f(\frac{\pi}{2}) = 1$  ergeben sich die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad 0 &= 0 \cdot a_5 + 0 \cdot a_3 + 0 \cdot a_1 && \text{Gleichung (I) wird von beliebigen } a_5, a_3 \text{ und } a_1 \\ \text{(II)} \quad \frac{1}{2} &= \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \cdot a_5 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 \cdot a_3 + \left(\frac{\pi}{6}\right) \cdot a_1 && \text{erfüllt. Das aus den Gleichungen (II) bis (IV)} \\ \text{(III)} \quad \frac{1}{2} \sqrt{2} &= \left(\frac{\pi}{4}\right)^5 \cdot a_5 + \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 \cdot a_3 + \left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot a_1 && \text{bestehende Gleichungssystem besitzt (gerundet)} \\ \text{(IV)} \quad 1 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^5 \cdot a_5 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 \cdot a_3 + \left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot a_1 && \text{die Lösung } a_5 = 0,0077, a_3 = -0,1662 \text{ und} \\ &&& a_1 = 0,9999 \text{ (Fig. F 6). Das Näherungspolynom} \end{aligned}$$

für  $f(x) = \sin x$  hat also die Gleichung  $p(x) = 0,0077x^5 - 0,1662x^3 + 0,9999x$ . Vergleicht man die mittels  $p(x)$  errechneten Funktionswerte z. B. an den Stellen  $x_1 = \frac{\pi}{5}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{3}$  und  $x_3 = 1,3$  mit den entsprechenden Taschenrechnerwerten, so ist in diesem Bereich eine sehr gute Übereinstimmung festzustellen (Fig. F 7, 2. und 4. Zeile), was sich auch im Verlauf der Graphen von  $f$  und  $p$  ausdrückt (Fig. F 8) Außerhalb des „Stützstellenintervalls“ erhöht sich aber auch hier rasch die Differenz.

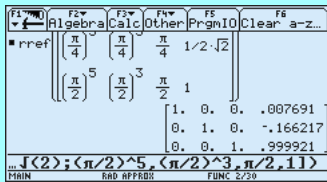


Fig. F 6

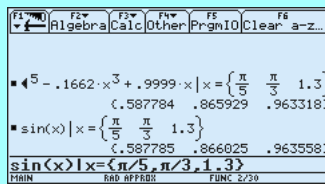


Fig. F 7

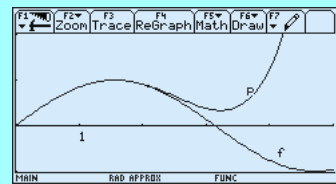


Fig. F 8

Grundsätzlich lässt sich jedes Interpolationsproblem durch den Polynomansatz lösen: Der Ansatz ist relativ einfach, die Bestimmung der Koeffizienten des Interpolationspolynoms zum Teil jedoch mit erheblichem Rechenaufwand verbunden, vor allem, wenn eine größere Zahl von Stützpunkten zu berücksichtigen ist. Das Verfahren ist demzufolge nur bei einfachen Zahlen und einer geringen Anzahl von Stützstellen zweckmäßig. Außerdem hat es den Nachteil, dass die Hinzunahme weiterer Punkte eine völlig neue Rechnung erfordert. Aus diesen Gründen haben J.-L. LAGRANGE (1736–1813) und I. NEWTON (1643–1727) den Ansatz für das Interpolationspolynom etwas anders gewählt und gelangten dadurch zu Formeln, die für die Berechnung einfacher sind, auf die jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden soll.

### F 1.2 Die TAYLORSche Formel für ganzrationale Funktionen

Wie aus der Differentialrechnung bekannt, liefert für eine differenzierbare Funktion  $f$  die **Tangentenfunktion**  $f_t$  in einer hinreichend kleinen Umgebung der zugehörigen Berührungsstelle  $x_0$  gute Näherungen der Funktionswerte von  $f$  (vgl. Abschnitt D 1, S. 84). Die Tangentenfunktion mit der Gleichung  $f_t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$  ist also in dieser Umgebung von  $x_0$  eine **lineare Näherungsfunktion** der Funktion  $f(x)$ . Für eine hinreichend kleine Umgebung von  $x_0$  gilt damit



$$f(x) \approx f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Man sagt, die Funktion  $f(x)$  wurde *linearisiert* (Fig. F 9).

Für  $x = x_0 + h$  ergibt sich die Näherungsbeziehung

$$f(x_0 + h) \approx f'(x_0) \cdot h + f(x_0).$$

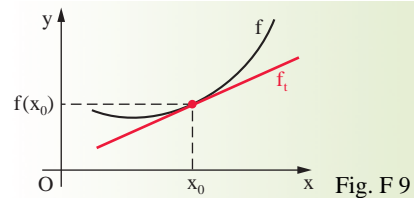


Fig. F 9

Beispiel F 4:

Für die Wurzelfunktion  $f(x) = \sqrt{x}$  sind Näherungswerte in der Umgebung von  $x_0 = 1$  zu bestimmen.

Die Anwendung der obigen Näherungsbeziehung auf  $f(x) = \sqrt{x}$  ergibt

$$f(x_0 + h) = \sqrt{x_0 + h} \approx \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot h + \sqrt{x_0}.$$

Für  $x_0 = 1$  erhält man somit  $\sqrt{1+h} \approx \frac{1}{2}h + 1$

(Fig. F 10).

Damit lassen sich Wurzelwerte in der Umgebung von  $x_0 = 1$  näherungsweise berechnen:

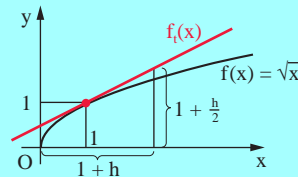


Fig. F 10

h	$\sqrt{1+h}$	Näherungswert $1 + \frac{h}{2}$	Taschenrechnerwert
0,5	$\sqrt{1,5}$	$1 + \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 1,25$	1,2247
0,3	$\sqrt{1,3}$	$1 + \frac{1}{2} \cdot 0,3 = 1,15$	1,1401
0,2	$\sqrt{1,2}$	$1 + \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 1,1$	1,0954
-0,2	$\sqrt{0,8}$	$1 - \frac{1}{2} \cdot 0,2 = 0,9$	0,8944
-0,5	$\sqrt{0,5}$	$1 - \frac{1}{2} \cdot 0,5 = 0,75$	0,7071

Der Anschauung (Fig. F 10) und der Rechnung (s. Tabelle) entnimmt man, dass die in diesem Beispiel ermittelten Näherungswerte alle etwas zu groß sind. Will man eine genauere Approximation erreichen, müsste man (anschaulich gesprochen) die Gerade „verbiegen“, damit sie sich noch besser an den Graphen der betrachteten Funktion „anschmiegt“. Das heißt aber: Man müsste ganzrationale Funktionen höheren Grades zu Hilfe nehmen.

Nach den bisherigen Ausführungen liegt die Frage nahe, ob es mithilfe der Differentialrechnung möglich ist, auf einfachere und schnellere Art als im Abschnitt F 1.1 besprochen Näherungsfunktionen für gegebene Funktionen in bestimmten Intervallen zu ermitteln.

Bereits in der Näherungsfunktion 1. Grades (Tangentenfunktion) tritt die 1. Ableitung als Koeffizient auf. Dies gibt zu der Vermutung Anlass, dass möglicherweise ein Zusammenhang zwischen den Koeffizienten des Näherungspolynoms und den Ableitungen der gegebenen Funktion besteht. Wir betrachten dazu die ganzrationale Funktion

$$f(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2x^2 + 4x + 7 \text{ mit den Koeffizienten } a_4 = 5, a_3 = 8, a_2 = -2, a_1 = 4 \text{ und } a_0 = 7.$$

Der Einfachheit halber beziehen wir unsere Überlegungen zunächst nur auf die Stelle  $x_0 = 0$ . Dann gilt sicher  $f(0) = 7 = a_0$ .

Bildet man die [Ableitungen](#), so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 20x^3 + 24x^2 - 4x + 4 & \text{und} & & f'(0) &= 4 = a_1; \\
 f''(x) &= 60x^2 + 48x - 4 & \text{und} & & f''(0) &= -4 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f''(0)}{2} = -2 = a_2; \\
 f'''(x) &= 120x + 48 & \text{und} & & f'''(0) &= 48 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f'''(0)}{6} = 8 = a_3; \\
 f^{(4)}(x) &= 120 & \text{und} & & f^{(4)}(0) &= 120 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f^{(4)}(0)}{24} = 5 = a_4.
 \end{aligned}$$

Bezogen auf eine allgemeine ganzrationale Funktion  $n$ -ten Grades

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  mit den Koeffizienten  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_2, a_1, a_0$  gilt dann analog:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= a_1 + 2a_2x + \dots + n \cdot a_n \cdot x^{n-1} \\
 f''(x) &= 2 \cdot a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \dots + (n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-2} \\
 f'''(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4a_4 \cdot x + \dots + (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a_n \cdot x^{n-3} \\
 &\vdots \\
 f^{(n)}(x) &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-2)(n-1) \cdot n \cdot a_n \\
 f^{(n)}(x) &= n! \cdot a_n
 \end{aligned}$$

Alle höheren Ableitungen sind identisch gleich 0. Für die Stelle  $x_0 = 0$  gilt:

$$f(0) = a_0; \quad f'(0) = a_1; \quad f''(0) = 2! \cdot a_2; \quad f'''(0) = 3! \cdot a_3; \quad \dots; \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

und damit

$$a_0 = f(0); \quad a_1 = f'(0); \quad a_2 = \frac{f''(0)}{2!}; \quad a_3 = \frac{f'''(0)}{3!}; \quad \dots; \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Dies zeigt: Die Koeffizienten einer Polynomfunktion sind durch die Ableitungen des Polynoms an der Stelle 0 bestimmt.

Das gefundene Ergebnis lässt sich verallgemeinern:

**F 3**

### Satz F 3: TAYLORSche Formel für ganzrationale Funktionen

Ist eine (ganzrationale) Funktion  $y = f(x)$  in einer Umgebung von  $x_0 = 0$   $n$ -mal differenzierbar, so existiert das Polynom

$$T_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n. \quad (1)$$

Es wird das  $n$ -te TAYLORSche Polynom von  $y = f(x)$  genannt.

Man sagt auch: Die Funktion  $y = f(x)$  ist an der Stelle 0 nach TAYLOR entwickelt und schreibt

$$\text{für (1) abkürzend } T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(0)}{i!} \cdot x^i. \quad (1')$$

Statt 0 als Entwicklungsstelle zu wählen, kann man die Funktion  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  auch an jeder anderen Stelle  $x_0 \in D_f$  nach TAYLOR entwickeln. Dazu ersetzt man zweckmäßigerweise zunächst  $x$  durch  $(x - x_0) + x_0$  und ordnet dann nach steigenden Potenzen von  $(x - x_0)$ . Durch diese Transformation ergibt sich

$$f(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n.$$

Differenziert man  $f(x)$  jetzt  $n$ -mal, so erhält man:

$$f'(x) = b_1 + 2b_2(x - x_0) + \dots + n \cdot b_n(x - x_0)^{n-1}$$

$$f''(x) = 2b_2 + \dots + (n-1) \cdot n \cdot b_n(x - x_0)^{n-2}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = n! \cdot b_n$$



Für  $x = x_0$  gilt somit

$$f(x_0) = b_0 \quad \text{bzw.} \quad b_0 = f(x_0); \quad f'(x_0) = b_1 \quad \text{bzw.} \quad b_1 = f'(x_0);$$

$$f''(x_0) = 2! \cdot b_2 \quad \text{bzw.} \quad b_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}; \dots; \quad f^{(n)}(x_0) = n! \cdot b_n \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Damit geht  $f(x)$  über in

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2)$$

$$\text{bzw.} \quad T_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x - x_0)^i. \quad (2')$$

Die Beziehungen (1) und (2) nennt man die **TAYLORSche Formel für ganzrationale Funktionen**.

Setzt man  $x - x_0 = h$  bzw.  $x = x_0 + h$ , so erhält man aus (2)

$$T_n(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \cdot h + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot h^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot h^n = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot h^i.$$

**Beispiel F 5:**

Die ganzrationale Funktion  $f(x) = 5 + 7x + 12x^2 - 2x^3 + 5x^4$  ist an der Stelle  $x_0 = -1$  nach **TAYLOR** zu entwickeln.

Es gilt:

$$f(-1) = 17$$

$$f'(x) = 7 + 24x - 6x^2 + 20x^3; \quad f'(-1) = -43 \quad f''(x) = 24 - 12x + 60x^2; \quad f''(-1) = 96$$

$$f'''(x) = -12 + 120x; \quad f'''(-1) = -132 \quad f^{(4)}(x) = 120; \quad f^{(4)}(-1) = 120$$

Demzufolge erhält man nach der Formel (2) als TAYLOR-Polynom von  $f(x)$ :

$$T_n(x) = 17 - 43(x + 1) + \frac{96}{2!}(x + 1)^2 - \frac{132}{3!}(x + 1)^3 + \frac{120}{4!}(x + 1)^4 \quad \text{bzw.}$$

$$T_n(x) = 17 - 43(x + 1) + 48(x + 1)^2 - 22(x + 1)^3 + 5(x + 1)^4$$

Ausrechnen der Potenzen und Zusammenfassen zeigt, dass  $T_n(x)$  und  $f(x)$  übereinstimmen.

**F 5**

**Beispiel F 6:**

Für die ganzrationale Funktion  $f(x) = (x - 1)^3 + (x + 2)^2$  ist das **TAYLOR-Polynom** an den Stellen  $x_0 = 0$  und  $x_0^* = 1$  zu ermitteln.

Es gilt:

$$f'(x) = 3(x - 1)^2 + 2(x + 2); \quad f''(x) = 6(x - 1) + 2; \quad f'''(x) = 6 \quad \text{und somit}$$

$$f(0) = 3; \quad f'(0) = 7; \quad f''(0) = -4; \quad f'''(0) = 6; \quad f(1) = 9; \quad f'(1) = 6; \quad f''(1) = 2; \quad f'''(1) = 6.$$

Nach den Formeln (1) bzw. (2) folgt daraus als TAYLOR-Polynom

$$\text{an der Stelle } x_0 = 0: \quad T_3(x) = 3 + 7x - 2x^2 + x^3,$$

$$\text{an der Stelle } x_0^* = 1: \quad T_3^*(x) = 9 + 6(x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3.$$

**F 6**

### F 1.3 Der Satz von TAYLOR

Es sollen nun für beliebige Funktionen Näherungspolynome mithilfe der TAYLORSchen Formel bestimmt werden. Damit erhält man die Möglichkeit, Werte jeder Funktion näherungsweise zu ermitteln, und zwar (wie später noch zu zeigen sein wird) mit jeder gewünschten Genauigkeit. Derartige Approximationen nicht-rationaler Funktionen durch TAYLOR-Polynome bilden unter anderem die Grundlage für entsprechende Rechenprozesse in Taschenrechnern und Computern.

Wenn  $f$  eine *ganzrationale Funktion*  $n$ -ten Grades ist, so gilt nach Satz A 1 und den darauf folgenden Betrachtungen  $f(x) = T_n(x)$ , d.h., die ganzrationale Funktion und ihr TAYLOR-Polynom stimmen überein.

In Beispiel F 5 war so  $f(x) = 5 + 7x + 12x^2 - 2x^3 + 5x^4$   
und  $T_4(x) = 17 - 43(x+1) + 48(x+1)^2 - 22(x+1)^3 + 5(x+1)^4$ .

Die Umformung des TAYLOR-Polynoms ergibt

$T_4(x) = 17 - 43x - 43 + 48 + 96x + 48x^2 - 22x^3 - 66x^2 - 66x - 22 + 5x^4 + 20x^3 + 30x^2 + 20x + 5$ ,  
und durch Zusammenfassen erhält man  $T_4(x) = 5 + 7x + 12x^2 - 2x^3 + 5x^4 = f(x)$ .

Nun sei  $f$  eine *nichtrationale Funktion* mit der Gleichung  $y = f(x)$ . In diesem Fall ist es nicht möglich, zur Annäherung von  $y = f(x)$  ein Polynom  $n$ -ter Ordnung zu verwenden, dessen Koeffizienten mit den Ableitungen von  $y = f(x)$  an der Stelle  $x = x_0$  in derselben Weise gebildet werden wie die Koeffizienten der TAYLOR-Entwicklung einer ganzrationalen Funktion. Dies ergibt sich bereits daraus, dass im Unterschied zu ganzrationalen Funktionen  $n$ -ten Grades die  $(n+1)$ -te und alle weiteren Ableitungen einer nichtrationalen Funktionen im Allgemeinen nicht identisch gleich 0 sind. Das heißt aber: Die Entwicklung einer solchen Funktion an einer Stelle  $x = x_0$  „bricht nicht ab“, sondern würde zu einer Summe mit unendlich vielen Summanden (Reihe) führen. In Analogie zu den Polynomfunktionen ließe sich für nichtrationale Funktionen also nur schreiben:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \dots$$

Die ersten  $n$  Glieder dieser Reihe<sup>1)</sup> stellen das bekannte TAYLOR-Polynom dar, die „restlichen“ und hier nur durch Punkte angedeuteten Glieder lassen sich zu einem Restglied  $R_{n+1}(x)$  zusammenfassen:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{beliebige Funktion}} = \underbrace{f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}_{\text{TAYLOR-Polynom } T_n(x)} + \underbrace{R_{n+1}(x)}_{\text{Restglied}}$$

Schon jetzt kann man erkennen: Die Frage, wie genau  $T_n(x)$  die Funktion  $f(x)$  approximiert, hängt einzig und allein vom Restglied  $R_{n+1}(x)$  ab. Anders ausgedrückt: Die TAYLOR-Entwicklung einer Funktion  $f(x)$  an der Stelle  $x_0$  approximiert die Funktion nur so gut, wie es das Restglied zulässt.

## F 7

## Beispiel F 7:

Für die Funktion  $f(x) = e^x$  sind die ersten vier **TAYLORSchen Näherungspolynome** an der Stelle  $x = 0$  zu bestimmen.

Da alle Ableitungen der Funktion  $f(x) = e^x$  mit der Funktion selbst übereinstimmen, also  $f(x) = f'(x) = f''(x) = \dots = e^x$  gilt, erhält man für die Stelle  $x = 0$ :  $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = e^0 = 1$ . Demnach haben die TAYLORSchen Näherungspolynome die Gestalt

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = 1 + x; \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} = 1 + x + \frac{x^2}{2};$$

$$T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}.$$

Fig. F 11 zeigt die Graphen von  $f(x) = e^x$  und  $T_0(x)$  bis  $T_3(x)$ , Letztere werden auch allgemein als **Schmiegeparabeln** bezeichnet.

<sup>1)</sup> Man spricht deshalb auch von der Entwicklung einer Funktion in eine TAYLOR-Reihe.

Man erkennt, wie die Schmiegeparabeln mit zunehmender Ordnung den Graphen von  $f(x) = e^x$  in der Umgebung der Stelle  $x_0 = 0$  immer besser annähern. Die Rechnung bestätigt diese Erkenntnis:

x	-0,1	0	0,1	0,2
$f(x) = e^x$	0,904837	1	1,105171	1,221403
$T_0(x)$	1	1	1	1
$T_1(x)$	0,9	1	1,1	1,2
$T_2(x)$	0,905	1	1,105	1,22
$T_3(x)$	0,904833	1	1,105167	1,221333

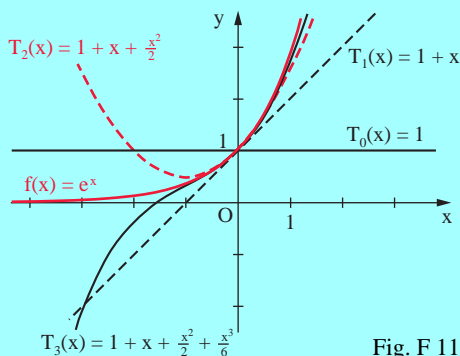


Fig. F 11

Beispiel F 8:

Es sind die ersten drei TAYLORSchen Näherungspolynome der Funktion  $f(x) = \cos x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  zu ermitteln.

Für die Ableitungen von  $f(x)$  und ihre Werte an der Stelle  $x_0 = 0$  ergibt sich:

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x & f'''(0) &= 0 \\ f^{(4)}(x) &= \cos x & f^{(4)}(0) &= 1 \end{aligned}$$

Damit erhält man die TAYLORSchen Näherungspolynome:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + 0 \cdot x = T_0$$

$$T_2(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$T_3(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 = T_2$$

$$T_4(x) = 1 + 0 \cdot x - \frac{x^2}{2} + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{24} x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

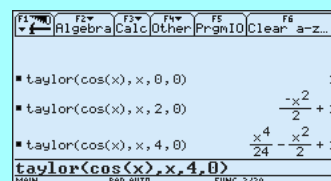


Fig. F 12

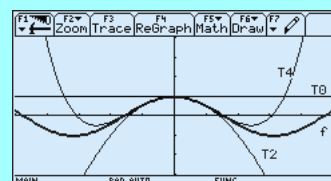


Fig. F 13

Die Figuren F 12 und F 13 zeigen die mithilfe des GTA erzeugten Näherungspolynome  $T_0$ ,  $T_2$  und  $T_4$  sowie den Graphen der Kosinusfunktion und die Schmiegeparabeln nullter, zweiter und vierter Ordnung. (Man beachte: Die Kosinusfunktion ist eine gerade Funktion.)

In der Umgebung von  $x_0 = 0$  erhält man durch Rechnung folgende Näherungswerte:

x	-0,1	0,2	0,5
$f(x) = \cos x$	0,995004	0,980067	0,877583
$T_0(x)$	1	1	1
$T_2(x)$	0,995	0,98	0,875
$T_4(x)$	0,995004	0,980067	0,877604

Auch an diesem Beispiel wird deutlich, dass die Schmiegeparabeln mit zunehmender Ordnung die gegebene Funktion in der Umgebung der betrachteten Stelle  $x_0 = 0$  immer besser annähern. Anders ausgedrückt: Der Grad der Genauigkeit der mithilfe der TAYLOR-Polynome berechneten Funktionswerte wird immer größer.

Die Beispiele zeigen ebenso: Auch beliebige Funktionen  $y = f(x)$  lassen sich in einer Umgebung der Stelle  $x_0$  näherungsweise durch TAYLOR-Polynome der Form

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

darstellen. Die Güte dieser Annäherung nimmt mit dem Grad  $n$  des TAYLOR-Polynoms zu.

Entscheidend für die Qualität der Approximation ist darüber hinaus das Restglied  $R_{n+1}(x)$ , für das mit Mitteln der Differentialrechnung verschiedene Darstellungen möglich sind. Ohne Beweis sei nachfolgend die Restglieddarstellung nach LAGRANGE mitgeteilt:

Für das **Restglied  $(n + 1)$ -ter Ordnung** einer Funktion  $y = f(x)$  in **LAGRANGEScher Form** gilt

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

wobei  $\vartheta$  eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 ist ( $0 < \vartheta < 1$ ). Wenn das Restglied (für  $n \rightarrow \infty$ ) **gegen 0 konvergiert**, spricht man von der Entwicklung der Funktion  $y = f(x)$  in eine TAYLOR-Reihe.

Die obigen Aussagen fasst der folgende Satz zusammen, der hier ohne Beweis angeführt sei:

F 4

#### Satz F 4: **Satz von TAYLOR**

Für eine beliebige Funktion  $y = f(x)$ , die in einer Umgebung von  $x = x_0$  mindestens  $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar ist, gilt

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x) \quad (4)$$

$$\text{mit } R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

(Allgemeine TAYLORSche Formel einer Funktion  $y = f(x)$  mit dem Restglied  $R_{n+1}(x)$  in LAGRANGEScher Form)

Für  $x = 0$  ergibt sich der Spezialfall

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!} x^n + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta \cdot x)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (5)$$

mit  $0 < \vartheta < 1$ . Diese Beziehung wird auch als **Formel von MACLAURIN** bezeichnet.

Aus (4) erhält man mit  $x - x_0 = h$  bzw.  $x = x_0 + h$  eine andere übliche Schreibweise der allgemeinen TAYLORSchen Formel einer Funktion  $y = f(x)$ :

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} h + \frac{f''(x_0)}{2!} h^2 + \dots + \frac{f^n(x_0)}{n!} h^n + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta \cdot h)}{(n+1)!} h^{n+1} \quad (0 < \vartheta < 1) \quad (6)$$

### F 1.4 TAYLOREntwicklung einiger nichtrationaler Funktionen

#### • *Trigonometrische Funktion*

Für die Funktion  **$f(x) = \sin x$**  und ihre Ableitungen an der Stelle  $x_0 = 0$  gilt

$$\begin{array}{ll} f(x) = \sin x & \text{mit } f(0) = 0, \\ f'(x) = \cos x & \text{mit } f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x & \text{mit } f''(0) = 0, \\ f'''(x) = -\cos x & \text{mit } f'''(0) = -1, \\ f^{(4)}(x) = \sin x & \text{mit } f^{(4)}(0) = 0 \end{array}$$

und damit allgemein (wie man durch vollständige Induktion zeigen kann) für  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{array}{ll} f^{(4k)}(x) = \sin x & \text{mit } f^{(4k)}(0) = 0, \\ f^{(4k+1)}(x) = \cos x & \text{mit } f^{(4k+1)}(0) = 1, \\ f^{(4k+2)}(x) = -\sin x & \text{mit } f^{(4k+2)}(0) = 0, \\ f^{(4k+3)}(x) = -\cos x & \text{mit } f^{(4k+3)}(0) = -1. \end{array}$$

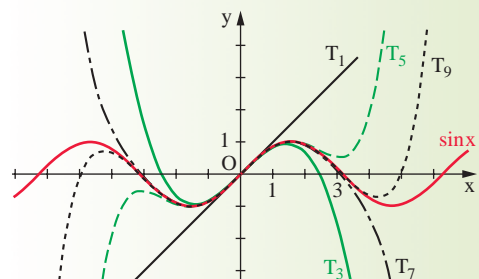


Fig. F 14

Im TAYLOR-Polynom der Sinusfunktion an der Stelle  $x_0 = 0$  treten also nur Potenzen von  $x$  mit ungeraden Exponenten auf. Mithilfe der allgemeinen TAYLORSchen Formel erhält man:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{(k-1)} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot \cos \vartheta x$$

TAYLOR-Polynom von  $f(x) = \sin x$       Restglied  $R_{2k+1}(x)$       mit  $0 < \vartheta < 1$

Um beurteilen zu können, wie gut das in der obigen Gleichung aufgestellte TAYLOR-Polynom die Funktion  $f(x) = \sin x$  an der Stelle  $x_0 = 0$  approximiert, muss das Restglied abgeschätzt werden: Wegen  $|\cos \vartheta x| \leq 1$  ist  $|R_{2k+1}(x)| \leq \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$ . Da  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = 0$ , konvergiert auch das Restglied  $R_{2k+1}(x)$  gegen 0. Erst jetzt können wir davon sprechen, dass sich die Sinusfunktion in der Umgebung von 0 durch das TAYLOR-Polynom approximieren lässt bzw. dass die Sinusfunktion in eine TAYLOR-Reihe entwickelt wurde:

$$f(x) = \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{(k-1)} \cdot \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots$$

Auf analogem Wege erhält man für die Funktion  $f(x) = \cos x$  die Entwicklung

$$f(x) = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \cdot \cos \delta x \quad \text{mit } 0 < \delta < 1.$$

Da auch das Restglied der Entwicklung der Kosinusfunktion bei festem  $x$  eine Nullfolge bildet, kann man mit den oben angegebenen TAYLOR-Reihen für jedes beliebige  $x$  die Werte  $\sin x$  und  $\cos x$  mit jeder beliebigen Genauigkeit berechnen (wobei  $x$  stets im Bogenmaß zu nehmen ist).

#### Beispiel F 9:

Es sollen der Sinus und der Kosinus eines Winkels von  $1^\circ$  berechnet werden. Mit

$$x = \frac{\alpha \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{1^\circ \cdot \pi}{180^\circ} \approx 0,0174532925 \quad \text{erhält man}$$

$$\frac{x^2}{2!} = 0,0001523087; \quad \frac{x^3}{3!} = 0,0000008861; \quad \frac{x^4}{4!} = 0,0000000039; \quad \frac{x^5}{5!} = 0,00000000013.$$

Wenn man bei  $\sin 1^\circ$  schon nach 2 Gliedern und bei  $\cos 1^\circ$  nach drei Gliedern das Restglied anfügt, ergibt sich

$$\sin 1^\circ = 0,0174532925 - 0,0000008861 + R_{2k+1}.$$

Wegen  $k = 2$  folgt  $R_5 \leq \frac{x^5}{5!}$  und somit

$$\sin 1^\circ = 0,0174532925 - 0,0000008861 + 0,0000000000, \quad \text{also } \sin 1^\circ = 0,0174524064.$$

Analog erhält man

$$\cos 1^\circ = 1 - 0,000152309 + 0,0000000039 - 0,0000000000, \quad \text{also } \cos 1^\circ = 0,9998476952.$$

Die durchgeführte Rechnung zeigt: Wenn man sich auf eine Genauigkeit von 5 Stellen nach dem Komma beschränkt, so kann man für Winkel bis zur Größe von  $1^\circ$  ohne merklichen Fehler die Näherungsbeziehungen  $\sin x = x$  und  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$  verwenden. Ist in anderen Fällen eine größere Genauigkeit erforderlich, so nimmt man weitere Glieder der TAYLOR-Entwicklung hinzu, rechnet also etwa mit  $\sin x = x - \frac{x^3}{6}$  bzw.  $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ .

F 9

#### Beispiel F 10:

Es ist  $\sin 1$  bis auf 4 Stellen nach dem Komma genau zu bestimmen.

$$\text{Aus } |R_{2k+1}(1)| \leq \frac{1}{(2k+1)!} < 10^{-4} \quad \text{folgt } (2k+1)! > 10000.$$

Wegen  $7! = 5040$  und  $9! = 362880$  ist  $n = 4$  zu wählen, d.h., man muss die ersten vier Glieder der TAYLOR-Entwicklung von  $\sin x$  für die Berechnung des Näherungswertes verwenden:

F 10

$$\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!}, \text{ also } \sin 1 = 0,841468 \approx 0,8415$$

*Anmerkung:*

Wenn bekannt ist, dass das Restglied gegen 0 konvergiert, kann man eine einfache Fehlerabschätzung auch in folgender Weise vornehmen: Man bildet so lange Partialsummen, bis die hinzukommenden Summanden keinen Beitrag mehr zur gewünschten Genauigkeit liefern. In Bezug auf das Beispiel  $\sin 1$  könnte das folgendermaßen aussehen:

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{9!} = 1,000000 + 0,008333 + 0,000003 = 1,008336$$

$$-\frac{1}{3!} + (-\frac{1}{7!}) = -0,166667 + (-0,000198) = -0,166865$$

Da das 5. Glied der TAYLOR-Entwicklung ( $\frac{1}{9!}$ ) hier nur noch die 6. Dezimalstelle beeinflusst, ist mit  $1,008336 - 0,166865 = 0,841471$  der Wert  $\sin 1 \approx 0,8415$  auf 4 Stellen genau berechnet.

### • Exponentialfunktionen

Die Funktion  $f(x) = e^x$  ist an der Stelle  $x_0 = 0$  nach [TAYLOR zu entwickeln](#). Da die Exponentialfunktion über ihrem gesamten Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar ist und sich dabei jeweils selbst reproduziert, gilt  $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 1$  und  $f^{(n+1)}(x) = e^x$ .

Nach Gleichung (5) erhält man demzufolge  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot e^{\vartheta x}$

als die gesuchte **TAYLORSche Formel** von  $f(x) = e^x$ .

Die TAYLOR-Entwicklung der Exponentialfunktion ermöglicht eine beliebig genaue Berechnung der Zahl  $e$ . Dazu setzt man in der TAYLORSchen Formel von  $f(x) = e^x$  für  $x = 1$  und erhält

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{\vartheta}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Da das Restglied  $R_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot e^{\vartheta}$  wegen  $2 < e < 3$  und demzufolge  $1 < e^{\vartheta} < 3$  (da  $0 < \vartheta < 1$ ) eine Nullfolge bildet, lässt sich die Zahl  $e$  mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmen.

Soll zum Beispiel  $e$  auf sieben Stellen nach dem Komma genau berechnet werden, so lässt sich aufgrund der Abschätzung des Restgliedes  $\frac{1}{(n+1)!} < R_{n+1} < \frac{3}{(n+1)!}$  sofort angeben, wie groß  $n$  zu wählen ist, damit die geforderte Genauigkeit erreicht wird. Um Rundungsfehler zu vermeiden, wird zweckmäßigerweise  $R_{n+1} < 10^{-8}$  gefordert. Für  $n$  ergibt sich dann wegen  $R_{n+1} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-8}$  die Beziehung  $(n+1)! > 3 \cdot 10^8 = 300000000$ .

Da  $11! = 39916800$  und  $12! = 479001600$ , muss  $n = 11$  gewählt werden, um den Fehler kleiner als  $10^{-8}$  zu halten. Damit erhält man für  $e$ :

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{11!}, \text{ also } e \approx 2,718281826 \text{ bzw. (auf 7 Stellen genau) } e \approx 2,7182818.$$

Soll nun für irgendein anderes  $x$  der Wert von  $e^x$  berechnet werden, so kann man im Wesentlichen ebenso vorgehen. Allgemein lässt sich zeigen (wenn auch nicht ganz so einfach wie im Falle  $x = 1$ ), dass bei fest gewähltem  $x$  das Restglied  $R_{n+1}$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0 strebt und demzufolge  $f(x) = e^x$  für jeden Wert von  $x$  mithilfe der TAYLORSchen Formel für diese Exponentialfunktion mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann.

### • Logarithmusfunktionen

Da die Logarithmusfunktionen  $f(x) = \log_a x$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$  und  $a \neq 1$  nur für  $x \in \mathbb{R}^*$  definiert sind, können sie nicht an der Stelle  $x_0 = 0$  in eine TAYLORSche Reihe entwickelt werden.

Aus diesem Grund betrachtet man zum Beispiel bei der **TAYLOR-Entwicklung** der natürlichen Logarithmusfunktion (Basis  $a = e$ ) anstelle von  $f(x) = \ln x$  die Funktion  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $x > -1$ , und kann nun auf diese den TAYLORSchen Satz in der MACLAURINSchen Form anwenden. Es ergibt sich:

$$f(x) = \ln(1+x) \quad f(0) = \ln 1 = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f'(0) = 1 \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad f''(0) = -1 \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^3}; \quad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-1 \cdot 2 \cdot 3}{(1+x)^4}; \quad f^{(4)}(0) = -6 \text{ usw., also:}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}; \quad f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} \cdot (n-1)!$$

Wegen  $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$  gilt damit

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}}.$$

Dieser Formel entnimmt man, dass für jedes  $x$  mit  $0 \leq x \leq 1$  das Restglied

$$R_{n+1} = (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \frac{1}{(1+\vartheta x)^{n+1}} \text{ mit } n \rightarrow \infty \text{ gegen } 0 \text{ strebt. Für solche } x \text{ gilt } |R_n| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Für jedes  $x$  aus diesem Intervall kann damit  $\ln(1+x)$  mit jeder gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Unter Verwendung von Hilfsmitteln, die hier nicht zur Verfügung stehen, lässt sich sogar zeigen, dass der natürliche Logarithmus jeder positiven reellen Zahl mit beliebiger Genauigkeit berechnet werden kann.

Für  $x = 1$  erhält man z.B.  $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ . Da diese Reihe sehr langsam konvergiert, ist sie für praktische Berechnungen recht unvorteilhaft. Zur Berechnung von  $\ln 2$  bedient man sich besser der TAYLOR-Entwicklung von  $\ln \frac{1+x}{1-x}$ :

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \cdot \left( x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right) \text{ mit } |x| < 1$$

$$\text{Für } x = \frac{1}{3} \text{ erhält man nämlich: } \ln \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \ln 2 = 2 \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{81} + \frac{1}{1215} + \frac{1}{15309} + \dots \right)$$

Auf 5 Stellen gerundet ergibt dies z.B.:

$$\ln 2 \approx 2(0,33333 + 0,01235 + 0,00082 + 0,00007) = 2 \cdot 0,34657 = 0,69314$$

(Taschenrechnerwert: 0,69314718)

## F 1.5 Das Verfahren der linearen Regression

- Bei der **Interpolation** (vgl. Abschnitt F 1.1) ging es darum, ausgehend von bekannten Punkten (Stützstellen; Stützwerten) einer beliebigen Funktion ein Interpolations- bzw. Näherungspolynom aufzustellen, mit dessen Hilfe weitere Funktionswerte näherungsweise bestimmt werden können. Geforderte Bedingung bei diesem Verfahren war, dass der Graph des Interpolationspolynoms durch alle gegebenen Punkte hindurchgeht.
- Mithilfe der **TAYLORSchen Entwicklung** einer beliebigen Funktion ließen sich aus der Kenntnis des Verhaltens dieser Funktion und all ihrer Ableitungen an einer Stelle  $x_0$  Näherungswerte in der Umgebung dieser Stelle ermitteln.



Bei vielen realen Sachverhalten in der Technik oder den Natur- und Sozialwissenschaften hat man es jedoch mit einem davon abweichenden Problem zu tun: Für zwei Größen (Merkmale)  $X$  und  $Y$  sind in einem Versuch zusammengehörende Wertepaare  $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)$  ermittelt worden – zum Beispiel Spannung  $U$  (unabhängige Größe  $X$ ) und Stromstärke  $I$  (abhängige Größe  $Y$ ) in einem Gleichstromkreis mit einem unbekannten Bauelement (Fig. F 15). Ändert sich die Spannung  $U$ , so hat das Änderungen der Stromstärke  $I$  zur Folge. Die Frage ist, ob es einen Zusammenhang zwischen der Stromstärke  $I$  und der Spannung  $U$  für das unbekannte Bauelement gibt und ob dieser sich durch eine Funktionsgleichung mathematisch beschreiben lässt. Die grafische Darstellung der möglichst unter gleichen Bedingungen zustande gekommenen Messwertpaare  $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)$  führt im rechtwinkligen Koordinatensystem zu einer Menge von Punkten (häufig auch als *Punktwolke* bezeichnet). Gesucht ist dann also eine Funktion, deren Graph *möglichst nahe an allen Punkten* liegt. Eine solche Funktion (bzw. ihren Graphen, die *Ausgleichskurve*) nennt man **Regressionsfunktion**, und das Verfahren zu ihrer Ermittlung wird schlechthin als **Regression**<sup>1)</sup> bezeichnet (Fig. F 16).

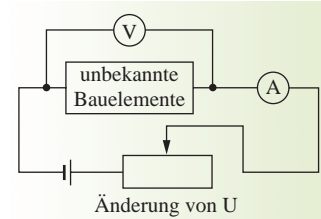
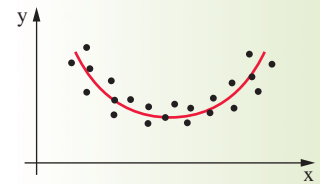


Fig. F 15

**Regression**

Problem: Eine Funktion bestimmen, so dass deren Graph möglichst nahe an allen Punkten liegt.

Fig. F 16

Ist die Regressionsfunktion eine lineare Funktion, so spricht man von **linearer Regression**. Auf diesen Fall wollen wir uns im Folgenden beschränken.

Grafisch lässt sich die Regressionsgerade wie in Fig. F 17, F 18, F 19 veranschaulicht bestimmen.

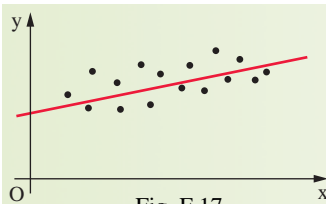


Fig. F 17

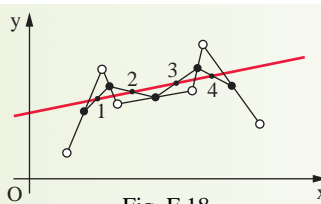


Fig. F 18

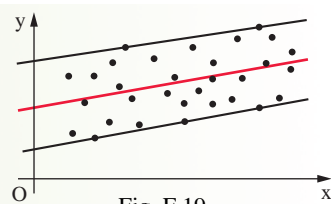


Fig. F 19

Man trägt die gewonnenen Wertepaare in ein Koordinatensystem ein und legt in die entstandene Punktwolke eine Gerade, so dass die einzelnen Punkte möglichst gleichmäßig „oberhalb“ und „unterhalb“ der Regressionsgeraden verteilt sind (Fig. F 17). Bei starker Streuung der Punkte kann man zu der Ausgleichsgeraden kommen, indem man die Punkte paarweise geradlinig verbindet, die Strecken halbiert und mit den benachbarten Mittelpunkten genauso verfährt. Durch fortgesetzte Anwendung dieses Verfahrens reduziert sich die Anzahl der Punkte bis auf wenige, durch die man dann die Ausgleichsgerade zeichnen kann (Fig. F 18). Liegen sehr viele Messpunkte vor, so lässt sich die sogenannte „Kanalermethode“ anwenden. Man verbindet jeweils die nach oben und unten am weitesten „außen“ liegenden Punkte durch eine Gerade. Die Mittellinie dieses „Kanals“ bzw. „Streifens“ wird als Ausgleichsgerade genommen (Fig. F 19).

Die rechnerische Anpassung der Regressionsgeraden an die vorgegebenen Punkte erfolgt nach der **Methode der kleinsten Quadrate**, die auf C. F. GAUSS zurückgeht. Im Einzelnen geht man folgendermaßen vor:

<sup>1)</sup> regressio (lat.) – Rückgang (hier im Sinne von: Rückrechnung oder Ausgleichsrechnung; aus vorgegebenen Punkten einen funktionalen Zusammenhang gewinnen)

Gegeben sind  $n$  Messwertpaare:

$X_i$	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$	$x_n$
$Y_i$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$\dots$	$y_n$

Gesucht ist eine lineare Funktion  $\hat{y} = ax + b$  mit der Eigenschaft, dass der Graph dieser Funktion (eine Gerade) möglichst nahe an allen Punkten vorbeigeht (Fig. F 20).

Die Methode der kleinsten Quadrate verlangt nun, dass die Summe der Quadrate der Abstände (Fehler) zwischen den Messpunkten  $(x_i; y_i)$  und den entsprechenden Punkten  $(x_i; \hat{y}_i)$  auf der Regressionsgeraden möglichst klein wird.

Bezeichnet man mit  $\hat{y}_i$  den mithilfe der Regressionsfunktion errechneten Wert und ist  $y_i$  der jeweils gemessene Wert, dann ergibt sich für die Fehler  $v_i$ :

$$v_1 = y_1 - \hat{y}_1 = y_1 - ax_1 - b$$

$$v_2 = y_2 - \hat{y}_2 = y_2 - ax_2 - b$$

$$\vdots$$

$$v_n = y_n - \hat{y}_n = y_n - ax_n - b$$

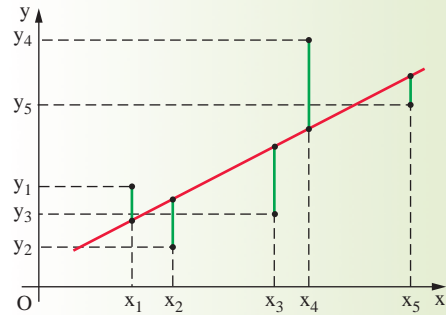


Fig. F 20

Für die Summe der Fehlerquadrate  $s$  gilt somit

$$s = v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2 \text{ bzw. } s(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2 \text{ – ein Ausdruck, der sowohl von } a \text{ als auch}$$

von  $b$  abhängt. Diese Summe soll nach der Methode der kleinsten Quadrate ein Minimum sein. Das heißt: Wir müssen die Ableitung von  $s$  nach  $a$  ( $b$  wird als konstant betrachtet) und die Ableitung von  $s$  nach  $b$  ( $a$  wird als konstant betrachtet) bilden<sup>1)</sup> und diese Ableitungen gleich 0 setzen. Es gilt

$$\frac{\partial s}{\partial a} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - ax_i - b) \cdot (-x_i)] = 0 \text{ und } \frac{\partial s}{\partial b} = \sum_{i=1}^n [2(y_i - ax_i - b) \cdot (-1)] = 0.$$

Durch Ausmultiplizieren und Umformen erhält man

$$\sum_{i=1}^n [-2(y_i \cdot x_i) + 2ax_i^2 + 2bx_i] = -2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2b \sum_{i=1}^n x_i = 0 \text{ bzw.}$$

$$\sum_{i=1}^n [-2y_i + 2ax_i + 2b] = -2 \sum_{i=1}^n y_i + 2a \sum_{i=1}^n x_i + 2b \cdot n = 0.$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems für  $a$  und  $b$  ergibt sich:

$$a = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \text{ und } b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left( \sum_{i=1}^n x_i \right)^2}$$

Für Berechnungen wird demnach benötigt:

$$\sum x_i, \quad \left( \sum x_i \right)^2, \quad \sum x_i^2, \quad \sum y_i, \quad \sum x_i \cdot y_i \quad (\text{mit jeweils } i = 1, \dots, n)$$

<sup>1)</sup> Man spricht in einem solchen Fall, wo eine Funktion von zwei Variablen abhängt, von **partieller Differentiation** und schreibt (auf das Beispiel bezogen)  $\frac{\partial s}{\partial a}$  bzw.  $\frac{\partial s}{\partial b}$

F 11

Beispiel F 11:

Gegeben sei die Messwertreihe

$x_i$	10	13	17	20
$y_i$	5,1	5,5	6,6	6,9

Vermutet wird ein linearer Zusammenhang.

Die Regressionsfunktion ist zu bestimmen.

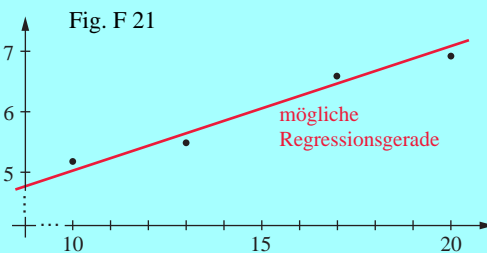
Berechnung:

Nr.	$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$x_i y_i$	$\hat{y}_i = ax_i + b$	$d_i^2 = (y_i - \hat{y}_i)^2$
1	10	5,1	100	51	5,058	0,0018
2	13	5,5	169	71,5	5,637	0,0188
3	17	6,6	289	112,2	6,409	0,0365
4	20	6,9	400	138,0	6,988	0,0077
$\Sigma$	$\sum_{i=1}^4 x_i = 60$	$\sum_{i=1}^4 y_i = 24,1$	$\sum_{i=1}^4 x_i^2 = 958$	$\sum_{i=1}^4 x_i y_i = 372,7$	$\sum_{i=1}^4 d_i^2 = 0,065$	

Aus dem linken Teil der Tabelle folgt für den Anstieg  $a$  der Regressionsgeraden

$$a = \frac{4 \cdot 372,7 - 60 \cdot 24,1}{4 \cdot 958 - 3600} = \frac{44,8}{232} \approx 0,193$$

$$\text{und für die Verschiebung } b \quad b = \frac{958 \cdot 24,1 - 60 \cdot 372,7}{232} = \frac{725,8}{232} \approx 3,128.$$

Damit erhält man als Gleichung für die Regressionsfunktion, die den in der Messreihe dargestellten Zusammenhang näherungsweise beschreibt:  $\hat{y} = 0,193x + 3,128$ Nunmehr lassen sich die  $\hat{y}_i$ -Werte berechnen sowie die Abweichungsquadrate  $d_i^2$  und damit die Summe der Abweichungsquadrate ermitteln (s. obige Tabelle, rechter Teil). Damit ist ein erstes Maß für die Güte der Näherung durch die Regressionsfunktion gegeben.Mit 0,065 erreicht diese Summe tatsächlich nur einen sehr kleinen Wert, so dass man davon ausgehen kann, dass es sich bei dem in der Messreihe dargestellten Sachverhalt wirklich um einen linearen Zusammenhang handelt, der durch die Funktion  $\hat{y} = 0,193x + 3,128$  annähernd gut beschrieben wird. Weiterhin kann man nun hinreichend genau für weitere  $x$ -Werte zwischen  $x_1 = 10$  und  $x_2 = 20$  die entsprechenden Näherungswerte angeben.

Um die wichtige Frage der Güte der Näherung bzw. Anpassung in dem aufgestellten Modell beantworten zu können, lassen sich Fehlerbetrachtungen zur Regressionsfunktion und darüber hinausgehende Untersuchungen durchführen, auf die aber an dieser Stelle verzichtet sei.

Bei einem linearen Zusammenhang der Form  $\hat{y} = a \cdot x$  vereinfacht sich die Regressionsrechnung

$$\text{wesentlich. Es ist dann } a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

## F 2 Fragen der Näherungsrechnung

In anderen Abschnitten dieses Buchs werden für das Lösen von Gleichungen und Differentialgleichungen (vgl. Abschnitt F 5) sowie für das Differenzieren und Integrieren von Funktionen Verfahren dargestellt, mit deren Hilfe man *exakte* Lösungen ermitteln kann. Es gibt jedoch Gleichungen und Integrationsaufgaben, für die solche exakte Lösungsverfahren nicht bekannt sind bzw. für die das Ermitteln exakter Lösung zu aufwändig wäre.

### Beispiel F 12:

Eine nach oben offene halbkugelförmige Schale ist bis zu ihrem halben Fassungsvermögen mit Flüssigkeit zu füllen. Wie hoch muss dann der Flüssigkeitspegel an der tiefsten Stelle der Schale sein?

Durch das Gleichsetzen der Formel für das halbe Halbkugelvolumen (Radius  $r$ ) mit der Formel für das Volumen einer Kugelkappe mit der Höhe  $h$  gelangt man zu der Gleichung  $3h^2r - h^3 = r^3$  bzw. mit  $x = \frac{h}{r}$  zu der Gleichung dritten Grades  $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ . Für derartige Gleichungen steht uns kein allgemein gültiges Lösungsverfahren zur Verfügung – aus der Darstellung des Graphen der zugehörigen Funktion ließe sich lediglich eine Nullstelle  $x_0 \approx 0,65$  näherungsweise ablesen.

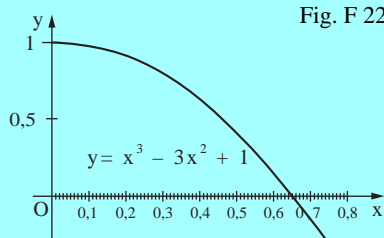


Fig. F 22

F 12

### Beispiel F 13:

Die Fläche eines Halbkreises mit dem Radius  $r = 1$  soll durch Integration ermittelt werden. Da bei  $M = 0$  für jeden Punkt  $P(x; y)$  des Kreises  $x^2 + y^2 = 1$  gilt, erhalten wir für den oberen Halbkreis die Funktionsgleichung  $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ . Die Maßzahl der Halbkreisfläche wird dann durch  $A = \int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$  angegeben. Dieses Integral lässt sich jedoch mit den in der Integralrechnung behandelten Verfahren nicht berechnen.

F 13

Im Unterschied zu der Situation bei den Integrationsaufgaben lassen sich alle durch Funktionsgleichungen beschriebene differenzierbaren Funktionen nach den bekannten Regeln *differenzieren*. Näherungsverfahren scheinen daher nicht erforderlich zu sein.

Ist jedoch eine zu betrachtende Funktion statt durch ihre Gleichung allein durch ihre Werte an einer endliche Zahl von Stützstellen, also durch eine Wertetabelle beschrieben, so benötigt man für die Ableitung der Funktion ebenfalls eine Näherung.

### Beispiel F 14:

Mittels eines Fallversuchs soll ein Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit  $v$  und der Zeit  $t$  beim freien Fall ermittelt werden. Da mit Schulmitteln die Momentangeschwindigkeit eines fallenden Steines nicht messbar ist, wird der Stein aus den verschiedenen Etagen und vom Dach der Schule fallen gelassen. Für jede Fallhöhe  $s$  wird die Fallzeit  $t$  in einer Messreihe bestimmt. Es ergeben sich die in der Tabelle enthaltenen Werte. Die Geschwindigkeit muss nun als Ableitung des Weges  $s$  nach der Zeit  $t$  *näherungsweise* ermittelt werden.

$s$ in m (y)	$t$ in s (x)
0	0,00
2	0,64
5	1,01
8	1,28
11	1,50
14	1,69

F 14

Die *Näherungsverfahren* für das Differenzieren und Integrieren sowie das Lösen von Gleichungen lassen sich in zwei Grundtypen einteilen:

- \* Sowohl die *erste Ableitung einer Funktion* als auch das *bestimmte Integral*, auf das die Betrachtung hier beschränkt bleibt, sind jeweils als **Grenzwerte einer besonderen Folge** definiert. Als Näherungswert für den eigentlich gesuchten Grenzwert kann deshalb ein *Folgenglied* mit hinreichend hohem Index benutzt werden. Durch bestimmte Ergänzungen und Wichtungen lässt sich die Näherung im Anschluß weiter verbessern.
- \* Anders verhält es sich beim *Lösen einer Gleichung*. Hier wird eine *Anfangsnäherung* benötigt (gewonnen z. B. aus der grafischen Darstellung der zugehörigen Funktion), die die Gleichung zwar nicht exakt löst, deren Abweichung zum exakten Wert aber in Grenzen bleibt. Weiterhin ist eine *Vorschrift* erforderlich, die angibt, wie eine bereits vorhandene Lösung verbessert werden kann. Durch die Anfangsnäherung und eine Vorschrift zur Verbesserung der Näherung wird eine *Folge von Näherungen iterativ erzeugt*, die man abbricht, wenn die gewünschte Genauigkeit erreicht ist.

• *Näherungen für die erste Ableitung einer Funktion an einer Stelle*

Es gilt  $y' = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . Als Näherung für  $f'(x)$  wird für ein hinreichend kleines  $h \in \mathbb{R}$ ,  $h \neq 0$ , der **Differenzenquotient**  $\frac{\Delta f(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  verwendet, also  $f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ . (1)

Für die weitere Betrachtung sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $h > 0$  festgelegt, wodurch die Näherung (1) nur den *rechtsseitigen* Differenzenquotienten, also nur den Verlauf der Funktion  $f$  rechts von  $x$  berücksichtigt. Ist die Funktion dort konvex, so liefert die Näherung einen zu großen Wert für  $f'(x)$ , ist sie dagegen konkav, so liefert die Näherung einen zu kleinen Wert. Deshalb wird als weitere Näherung der *linksseitige* Differenzenquotient benutzt:  $f'(x) \approx \frac{f(x) - f(x-h)}{h}$ . (2)

Dieser liefert im Falle einer konvexen Funktion einen zu kleinen, im Falle einer konkaven Funktion einen zu großen Funktionswert. Da die Fehlertendenz in beiden Fällen gegenläufig ist, verwendet man häufig den Mittelwert aus rechts- und linksseitigem Differenzenquotienten und setzt

$$f'(x) \approx \frac{1}{2} \left( \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \frac{1}{2} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + \frac{1}{2} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (3)$$

$$\text{bzw. } f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \quad (4)$$

Eine Näherung für  $f'(x)$  nach Gleichung (4) setzt voraus, dass jeweils links und rechts von der zu untersuchenden Stelle  $x$  in der Wertetabelle noch wenigstens ein Wertepaar vorhanden ist und dass die Stützstellen  $x_L = x - h$ ,  $x_M = x$  und  $x_R = x + h$  gleiche Abstände  $h$  aufweisen.

## F 15

## Beispiel F 15:

Es ist die **erste Ableitung der Funktion**  $y = f(x) = x^3$  an der Stelle  $x_0 = 1$  mit  $h_1 = 0,3$ ,  $h_2 = 0,1$  und  $h_3 = 0,01$  näherungsweise zu berechnen.

$$f'(1) \approx \frac{(1+h)^3 - (1-h)^3}{2h} = \frac{(1,3)^3 - (0,7)^3}{0,6} \approx 3,09; \quad \frac{(1,1)^3 - (0,9)^3}{0,2} \approx 3,01; \quad \frac{(1,01)^3 - (0,99)^3}{0,02} \approx 3,0001$$

Das Ergebnis zeigt eine gute Übereinstimmung mit dem exakten Wert  $f'(1) = 3$ . Je kleiner man  $h$  wählt, desto genauer wird die Näherung.

Im Beispiel F 14 sind die Abstände benachbarter Fallzeiten (entspricht  $x$ ) nicht konstant. Das Vorgehen in solchen Fällen soll nun erläutert werden.

Für eine Funktion  $f$  liegt eine Wertetabelle vor mit  $x_L < x_M < x_R$ .  $f'(x_M)$  soll näherungsweise ermittelt werden. Als Ersatz für den unbekannten Verlauf der Funktion  $f$  benutzt man eine quadratische Funktion  $q(x) = dx^2 + ex + f$  mit  $d, e, f \in \mathbb{R}$ , die durch die in der Wertetabelle enthaltenen Stützpunkte verläuft, und ermittelt deren Parameter durch ein Gleichungssystem (vgl. Beispiel F 1). Die erste Ableitung  $q'(x_M)$  wird als Näherung der gesuchten Ableitung  $f'(x_M)$  genutzt. Es ergibt sich:

$$f'(x_M) \approx \frac{x_R - x_M}{x_R - x_L} \cdot \frac{y_M - y_L}{x_M - x_L} + \frac{x_M - x_L}{x_R - x_L} \cdot \frac{y_R - y_M}{x_R - x_M} \quad (5)$$

Die fett hervorgehobenen Quotienten sind der links- und der rechtsseitige **Differenzenquotient** für  $f$  an der Stelle  $x_M$ . Die jeweils davor stehenden Quotienten sind Wichtungsfaktoren für die beiden Differenzenquotienten, die in Abhängigkeit von der Teilung des Intervalls  $[x_L; x_R]$  bestimmen, wie stark jeder einzelne Differenzenquotient in den Näherungswert eingeht. Teilt  $x_M$  das Intervall  $[x_L; x_R]$  genau in der Mitte, so gilt  $x_R - x_M = x_M - x_L = \frac{1}{2}(x_R - x_L) = h$ . Die beiden Wichtungsfaktoren erhalten den Wert  $\frac{1}{2}$ . In diesem Fall stimmt Gleichung (5) mit den Gleichungen (3) und (4) überein.

#### Beispiel F 16:

Für die in Beispiel F 13 betrachtete Funktion  $s = s(t)$  soll an den Stützstellen die 1. Ableitung näherungsweise ermittelt werden. Die Größe  $t$  hat jetzt die Bedeutung der Variablen  $x$  und  $s$  entspricht der abhängigen Variablen  $y$ . Für den ersten Stützwert  $t = 0$  kann lediglich der rechtsseitige (vgl. Gleichung (1)) und für den letzten Stützwert  $t = 1,69$  s nur der links-

seitige Differenzenquotient (vgl. Gleichung (2)) berechnet werden. Für alle anderen Stützstellen wird Gleichung (5) verwendet. Dabei ist  $x_M$  der  $x$ -Wert der jeweiligen Stützstelle,  $x_L$  ist der davorliegende und  $x_R$  der nachfolgende  $x$ -Wert. Die Näherungswerte  $v(t) = s'(t)$  sind in obiger Tabelle enthalten, wobei die kursiv dargestellten Geschwindigkeiten mittels einseitigem Differenzenquotienten berechnet wurden. Die rechte Spalte der Tabelle liefert annähernd konstante Werte für die Beschleunigung  $a$  (theoretisch:  $a = g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ).

$s$ in m (y)	$t$ in s (x)	$v$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$	$a = \frac{v}{t}$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$
(gemessen)	(gemessen)	(Näherung)	
0	0,00	<i>3,13</i>	
2	0,64	<b>6,28</b>	<b>9,82</b>
5	1,01	<b>9,84</b>	<b>9,75</b>
8	1,28	<b>12,50</b>	<b>9,77</b>
11	1,50	<b>14,79</b>	<b>9,86</b>
14	1,69	<i>15,79</i>	9,34

F 16

#### • Näherungen für das bestimmte Integral einer Funktion

Gegeben sei eine Funktion  $f$  in einem Intervall  $[a; b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $b > a$ . Mit Bezug auf die in Abschnitt E 2.2 abgeleiteten Ausdrücke für die Untersumme  $s_n$  und die Obersumme  $S_n$  sowie Definition E 3 verwendet man – wie eingangs erläutert – folgende Näherung für das bestimmte Integral:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) \Delta x \quad \text{bzw.} \quad \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \Delta x$$

Diese Näherung soll nun mit Blick auf den Arbeitsaufwand und die Genauigkeit verbessert werden.<sup>1)</sup>

Das *erste* Problem besteht darin, dass die Ermittlung der globalen Extrema  $f(\bar{x}_i)$  und  $f(\bar{x}_i)$  in den Teilintervallen zu aufwändig ist. Deshalb verwendet man statt dessen die Funktionswerte  $y$  am linken oder rechten Intervallende. Da sich in dem schmalen Intervall die Funktionswerte nur wenig ändern, bleibt die Wirkung der vorgenommenen Veränderung gering.

Das *zweite* Problem resultiert aus der Frage, wie genau sich das obere Ende des Streifens dem Funktionsverlauf anpassen lässt, wie gut also die Streifenfläche mit der Fläche unter dem Graphen im

<sup>1)</sup> Die folgenden Überlegungen werden immer an dem Fall  $f(x) > 0$  veranschaulicht, die Ergebnisse hängen aber nicht von dieser Einschränkung ab, sie sind allgemein gültig.

betrachteten Intervall zur Übereinstimmung gebracht werden kann. Je besser diese Übereinstimmung ist, desto weniger Teilintervalle werden benötigt, um zur gleichen Endgenauigkeit zu gelangen. Dazu sollen *drei Fälle* betrachtet werden:

**1. Fall (Rechteckmethode):** Der Streifen ist ein Rechteck mit der Breite  $\Delta x$ . Die Höhe wird bestimmt durch den Funktionswert  $y_{i-1}$  am linken (bzw.  $y_i$  am rechten) Intervallende (Fig. F 23). Daraus ergibt sich die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n y_{i-1} \Delta x = \Delta x \cdot \sum_{i=1}^n y_{i-1}$$

**2. Fall (Trapezmethode):** Der Streifen ist ein Trapez mit der Breite  $\Delta x$ . Als Höhe wird der Mittelwert der Funktionswerte  $y_{i-1}$  und  $y_i$  am linken und am rechten Intervallende benutzt. (Fig. F 24) Daraus ergibt sich die Näherungsformel:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \Delta x = \frac{1}{2} \Delta x \cdot \left[ \sum_{i=1}^n y_{i-1} + \sum_{i=1}^n y_i \right]$$

Die erste Summe in der eckigen Klammer addiert alle Funktionswerte von  $y_0$  bis  $y_{n-1}$ , die zweite Summe alle Funktionswerte von  $y_1$  bis  $y_n$ . In der eckigen Klammer entsteht daher die Summe  $S$ , in der  $y_0$  und  $y_n$  einmal, aller anderen Funktionswerte jedoch zweimal auftreten:  $S = y_0 + 2y_1 + \dots + 2y_{n-1} + y_n$ . Zusammengefasst ergibt das:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \Delta x \left[ \frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right] \quad (\text{Trapezformel})$$

**3. Fall (SIMPSONsche Regel):** Das Intervall  $[a; b]$  muss in eine *gerade* Zahl  $2k$  von Teilintervallen zerlegt werden. Je zwei benachbarte Streifen werden zu einem Streifenpaar zusammengefasst (Fig. F 25). Es entstehen  $k$  Streifenpaare. In jedem Streifenpaar gibt es drei Stützpunkte, deren  $x$ -Werte  $x_L, x_M, x_R$  den gleichen Abstand  $\Delta x$  haben. Durch diese drei Punkte wird als Näherung für den exakten Verlauf der Funktion  $f$  und als obere Begrenzung des Streifenpaares eine quadratische Parabel gelegt. Das Vorgehen ist vergleichbar mit dem Parabelansatz bei der Ermittlung der ersten Ableitung (vgl. S. 197). Als Näherung für das bestimmte Integral ergibt sich schließlich

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{\Delta x}{3} (y_0 + y_{2k} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2k-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2k-1})).$$

Diese Näherungsformel für bestimmte Integrale bezeichnet man nach dem englischen Mathematiker Thomas SIMPSON als **SIMPSONsche Regel**.

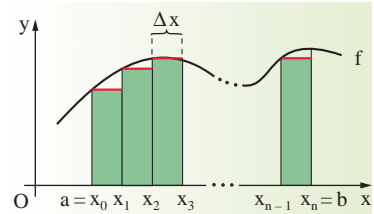


Fig. F 23

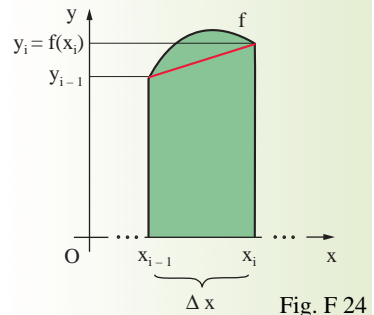


Fig. F 24

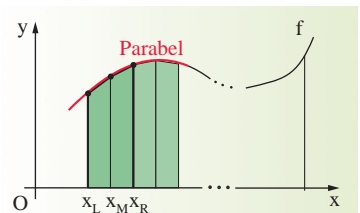


Fig. F 25

F 17

Beispiel F 17:

Näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals  $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx$  (Flächeninhalt eines Halbkreises mit  $r = 1$  LE) mittels der oben genannten drei Methoden;  $n = 10$ ,  $\Delta x = 0,2$ .

Wertetabelle:

x	-1	-0,8	-0,6	-0,4	-0,2	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y	0,000	0,600	0,800	0,917	0,980	1,000	0,980	0,917	0,800	0,600	0,000



$\Delta x = 0,2$	Rechteckmethode	Trapezmethode		SIMPSONSche Regel		
x	y	Y <sub>Rand</sub>	y	Y <sub>Rand</sub>	Y <sub>ungerade</sub>	Y <sub>gerade</sub>
-1,0	0,000	0,000		0,000		
-0,8	0,600		0,600		0,600	
-0,6	0,800		0,800			0,800
-0,4	0,917		0,917		0,917	
-0,2	0,980		0,980			0,980
0,0	1,000		1,000		1,000	
0,2	0,980		0,980			0,980
0,4	0,917		0,917		0,917	
0,6	0,800		0,800			0,800
0,8	0,600		0,600		0,600	
1,0		0,000		0,000		
Summe	7,593	0,000	7,593	0,000	4,033	3,560
$I \approx 0,2 \cdot 7,593;$ <b><math>I \approx 1,52</math></b>		$I \approx 0,2 \cdot (0,5 \cdot 0 + 7,593);$ <b><math>I \approx 1,52</math></b>		$I \approx \frac{0,2}{3} \cdot (0 + 4 \cdot 4,033 + 2 \cdot 3,569);$ <b><math>I \approx 1,55</math></b>		

Der exakte Wert des bestimmten Integrals beträgt  $\frac{\pi}{2} \approx 1,571$ . Die Abweichung der ermittelten Näherungen liegt zwischen etwa 0,05 bei den ersten beiden Methoden und 0,02 bei der SIMPSONSchen Regel. Diese liefert wegen des höheren theoretischen Aufwandes normalerweise immer genauere Näherungen. Die Trapezmethode führt hier zu keinem besseren Ergebnis als die schlichtere Rechteckmethode, da die wichtigen Werte am Rand beide null sind.

### • Näherungsverfahren zum Lösen von Gleichungen

Ein effektives Näherungsverfahren für das Lösen von Gleichungen ist das nach dem englischen Mathematiker, Physiker und Astronomen Isaac NEWTON (1643–1727) benannte **NEWTONSche Verfahren**. Die nach einer Variable aufzulösende Gleichung wird dabei so umgestellt, dass auf einer Seite lediglich die Null steht. Der Ausdruck auf der anderen Seite enthält die zu ermittelnde Variable, z.B. x, und wird als Funktionsterm, also als f(x) aufgefasst. Man erhält  $f(x) = 0$  – das Lösen der Gleichung ist gleichbedeutend mit der Suche nach **Nullstellen**  $x_0$  der Funktion f.

Nun wird zuerst eine *Anfangsnäherung*  $x_1$  für die gesuchte Nullstelle  $x_0$  der Funktion f ermittelt, z.B. aus dem Graphen von f. Weiterhin benötigt man eine Vorschrift, die die Näherung  $x_1$  und jede weitere verbessern kann, die also die vorliegende Näherung noch näher an  $x_0$  heranrückt.

Beim NEWTONverfahren wird zu diesem Zwecke im Punkt  $B_1(x_1; f(x_1))$  die Tangente an den Graphen gelegt (Fig. F 26). Sie hat den Anstieg  $f'(x_1)$  und die Gleichung  $y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$ . Die Tangente wird nun als Ersatz für den Funktionsgraphen benutzt und ihre Nullstelle  $x_2$  berechnet.

Aus  $0 - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$  folgt nach Umformungen

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}.$$

Die rechte Seite lässt sich berechnen, da f

gegeben ist, eine Anfangsnäherung  $x_1$  vorliegt und aus f die

Ableitung  $f'$  ermittelt werden kann. Unter geeigneten Bedingungen (die in Fig. F 26 erfüllt sind),

liegt  $x_2$  tatsächlich näher bei der zu ermittelnden Nullstelle als  $x_1$ , ist also eine genauere Näherung.

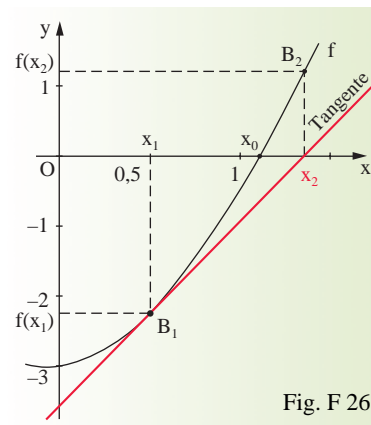


Fig. F 26

Um die Genauigkeit der Näherung weiter zu verbessern liegt es nahe, nun  $x_2$  als Startwert zu verwenden, an  $B_2$  eine Tangente anzulegen und als neue Näherung  $x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$  zu berechnen.

Dieses Vorgehen kann beliebig oft wiederholt werden. Es wird stets wieder die Formel  $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$  mit  $i \in \mathbb{N}$ ,  $i > 0$ ,  $f'(x_i) \neq 0$  benutzt, die ihrerseits eine rekursive Bildungsvorschrift der Folge  $(x_i)$  darstellt. Das NEWTONverfahren wird auch als ein **iteratives Verfahren**<sup>1)</sup> bezeichnet, da es auf der wiederholten Anwendung obiger Gleichung beruht.

F 18

Beispiel F 18:

Für die Funktion  $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$  (vgl. Beispiel F 12) und die Startwerte  $x_1 = 0,6$  und  $x_1 = 3$  soll nach dem **NEWTONverfahren** die in Fig. F 22 gezeigte Nullstelle ermittelt werden. Der Rekursionsschritt nach Einsetzen der konkreten Funktion lautet

$$x_{i+1} = x_i - \frac{x_i^3 - 3x_i^2 + 1}{3x_i^2 - 6x_i} = \varphi(x_i)$$

Iteration	Kontrolle	Iteration	Kontrolle
1. Start $x_1 = 0,6$	$f(x_1) = 0,136$	2. Start $x_1 = 3$	$f(x_1) = 1$
$x_2 = \varphi(x_1) = 0,65396825$	$f(x_2) = -0,0033379$	$x_2 = \varphi(x_1) = 2,88888889$	$f(x_2) = 0,07270233$
$x_3 = \varphi(x_2) = 0,65270427$	$f(x_3) = -1,6605E-06$	$x_3 = \varphi(x_2) = 2,87945157$	$f(x_3) = 0,00050385$
$x_4 = \varphi(x_3) = 0,65270364$	$f(x_4) = -4,1278E-13$	$x_4 = \varphi(x_3) = 2,87938524$	$f(x_4) = 2,4801E-08$
$x_5 = \varphi(x_4) = 0,65270364$	$f(x_5) = 0$	$x_5 = \varphi(x_4) = 2,87938524$	$f(x_5) = -3,5527E-15$
$x_6 = \varphi(x_5) = 0,65270364$	$f(x_6) = 0$	$x_6 = \varphi(x_5) = 2,87938524$	$f(x_6) = 0$

Mit dem Startwert  $x_1 = 0,6$  wird schon mit dem 3. Iterationsschritt eine Näherung erreicht, die bis zur achten Stelle nach dem Komma stabil ist. Als Näherungswert kann  $x_0 \approx 0,652704$  angegeben werden. Der Start mit der Anfangsnäherung  $x_1 = 3$  führt auch zu einem stabilen Ergebnis, allerdings wurde wegen der ungünstig gewählten Startnäherung eine andere Nullstelle der gleichen Funktion gefunden. Dies zeigt: Die Wahl einer geeigneten Startnäherung ist ausschlaggebend für den Erfolg der iterativen Näherung.

### F 3 Extremwertprobleme

Eines der vielen wichtigen Anwendungsgebiete der Differentialrechnung ist das Lösen von Extremwertaufgaben. Es geht dabei – vereinfacht ausgedrückt – um das Ermitteln *derjenigen* Lösung aus der Menge *aller* Lösungen für ein bestimmtes (praktisches) Problem, die unter Berücksichtigung vorgegebener Bedingungen die *optimale Variante* darstellt.

Die hierfür genutzte **Strategie** lässt sich folgendermaßen kennzeichnen: Um die Hilfsmittel der Extremwertberechnung anwenden zu können, beschreibt man zunächst die den jeweiligen Sachverhalt kennzeichnenden Zusammenhänge mittels einer Funktion (*Zielfunktion*), in der als *abhängige* Variable gerade *diejenige Größe* auftritt, welche einen *Extremwert* annehmen soll. Enthält diese Zielfunktion *mehrere unabhängige* Variable, dann versucht man, deren Anzahl durch Verwendung weiterer sich aus der Aufgabe ergebenden Bedingungen (Nebenbedingungen) bis auf *eine Variable* zu reduzieren und bestimmt ein für die Lösung sinnvolles abgeschlossenes Intervall (meist der Definitionsbereich). Die Lösung des Ausgangsproblems wird dann durch das *globale Extremum* der Zielfunktion im genannten Intervall angegeben.

<sup>1)</sup> iterare (lat.) – wiederholen

Die anschließenden Beispiele verdeutlichen eine zweckmäßige Schrittfolge für die Umsetzung der oben skizzierten Lösungsstrategie.

F 19

Beispiel F 19:

Es sollen zylinderförmige Blechdosen mit einem Volumen von  $a \text{ cm}^3$  ( $a > 0$ ) hergestellt werden. Wie groß müssen Radius  $r$  und Höhe  $h$  gewählt werden, damit der Blechverbrauch möglichst klein ist? (Die Blechstärke bleibt unberücksichtigt.)

**(1) Analyse der Aufgabe:**

Gegeben: Volumen des Zylinders  $V = a \text{ cm}^3$

Gesucht:  $r$ ,  $h$  (für den Fall minimaler Oberfläche  $O$ ) sowie  $O_{\min}$

**(2) Aufstellen der Funktion mit Extremalbedingung (Zielfunktion):**

Für den Oberflächeninhalt eines Zylinders mit dem Radius  $r$  und der Höhe  $h$  gilt

$O = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ . Also ist die Zielfunktion  $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ , d. h.,  $O$  ist von zwei Variablen abhängig. Es muss versucht werden, eine der beiden Variablen anhand von Nebenbedingungen durch eine andere auszudrücken.

**(3) Angabe von Nebenbedingungen:**

Für das Zylindervolumen gilt die Formel  $V = \pi r^2 h$ . Da im vorliegenden Fall  $\pi r^2 h = a$  gelten soll, folgt  $h = \frac{a}{\pi r^2}$ .

**(4) Einsetzen der Nebenbedingungen in die Zielfunktion:**

Aus  $O(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$  und  $h = \frac{a}{\pi r^2}$  folgt  $O(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{a}{r^2 \cdot \pi} = 2\pi r^2 + 2a r^{-1}$ .

**(5) Festlegen des Definitionsbereiches:**

Bei dieser Aufgabe ist es sinnvoll, das Definitionsintervall mit  $r \in ]0; a[$  festzulegen.  $O(r)$  ist in diesem Intervall auch differenzierbar.

**(6) Ableitungen der Zielfunktion:**

$O'(r) = 4\pi r - 2a r^{-2}$ ;  $O''(r) = 4\pi + 4a r^{-3} > 0$  für  $r > 0$ , da  $a > 0$

**(7) Bestimmen des lokalen Extremums:**

Wegen der notwendigen Bedingung  $O'(r) = 0$  muss gelten:  $4\pi r - 2a r^{-2} = 4\pi r - \frac{2a}{r^2} = 0$ .

Daraus folgt  $4\pi r^3 = 2a$ , also  $r^3 = \frac{2a}{4\pi}$  und damit  $r = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$ .

Wegen  $O''(r) > 0$  (s.o.) ist  $r = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$  eine lokale Minimumstelle von  $O(r)$ .

**(8) Ermitteln des globalen Extremums:**

Die einzige lokale Extremstelle der im Definitionsbereich stetigen Funktion  $O(r)$  ist eine Minimumstelle, die damit auch globale Minimumstelle ist.

**(9) Interpretieren der errechneten Werte:**

Aus  $r = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$  folgt für  $h = \frac{a}{\pi \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}}{\pi \cdot \frac{a}{2\pi}} = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} = d$ .

Höhe und Durchmesser eines Zylinders müssen also gleich groß sein, wenn der Oberflächeninhalt des Zylinders bei gegebenem Volumen möglichst klein sein soll.

F 20

Beispiel F 20:

Gegeben ist die Gleichung der Parabelschar  $f_t(x) = tx - \frac{1+t^2}{12}x^2$  ( $t \in \mathbb{R}$ ). Die Achsenschnittpunkte und der Scheitel einer Scharparabel seien Eckpunkte eines Dreiecks. Für welche Scharparabel hat das Dreieck den größten Flächeninhalt?

- (1) Alle Parabeln dieser Schar haben die Nullstellen  $x_{01} = 0$  und  $x_{02} = \frac{12t}{1+t^2}$ , die Achsenschnittpunkte sind also  $P_1(0; 0)$  und  $P_2(\frac{12t}{1+t^2}; 0)$ . (Für  $t = 0$  existiert nur  $P_1$ . Die Gleichung der betreffenden Parabel ist  $f_0(x) = -\frac{1}{12}x^2$ , eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitelpunkt in  $(0; 0)$  liegt. Ein Dreieck existiert also nicht. Bei den weiteren Betrachtungen schließen wir  $t = 0$  aus.)

Die Scheitelpunktskoordinaten lauten:  $S_t(\frac{6t}{1+t^2}; \frac{3t^2}{1+t^2})$  („Formeln und Tabellen“, S. 38).

Für  $-t$  ergibt sich  $S_{-t}(\frac{-6t}{1+t^2}; \frac{3t^2}{1+t^2})$ , also nur eine Spiegelung an der y-Achse. Der Flächeninhalt des jeweiligen Dreiecks bleibt dadurch unverändert (Fig. F 27).

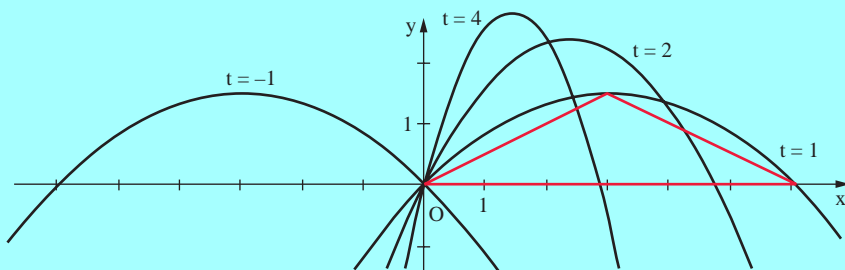


Fig. F 27

Zu ermitteln ist nun  $t$  so, dass  $A_{\Delta P_1 P_2 S_t}$  maximal wird.

- (2)  $A_{\Delta} = \frac{1}{2} g \cdot h_g$

Die Grundseite des Dreiecks entspricht dem Abstand der beiden Nullstellen,  $h_g$  der y-Koordinate von  $S_t$ .

$$A(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{12t}{1+t^2} \cdot \frac{3t^2}{1+t^2} = 18 \frac{t^3}{(1+t^2)^2} \quad (t \neq 0)$$

(Die Schritte 3) bis 5) entfallen hier, da die Zielfunktion nur von einer Variablen abhängig ist und der Definitionsbereich feststeht.)

$$(6) A'(t) = 18 \frac{3t^2(1+t^2)^2 - t^3 \cdot 2(1+t^2) \cdot 2t}{(1+t^2)^4} = 18 \frac{t^2(3-t^2)}{(1+t^2)^3}$$

- (7)  $A'(t_0) = 0$ , woraus wegen  $t \neq 0$  und  $1+t^2 \neq 0$  folgt:  $3-t_0^2 = 0$ , also  $t_{01,02} = \pm\sqrt{3}$ .

für  $|t| < \sqrt{3}$  gilt  $A'(t) > 0$ ; } Bei  $|t| = \sqrt{3}$  liegt ein (+/-)-VZW von  $A'(t)$  vor.  
 für  $|t| > \sqrt{3}$  gilt  $A'(t) < 0$ . }  $A(t)$  hat also bei  $|t| = \sqrt{3}$  lokale Maxima.

- (8) Es gilt  $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{18t^3}{1+2t^2+t^4} = 0$  – die lokalen Maxima sind auch die globalen.

- (9) Für die Scharparabeln mit  $|t| = \sqrt{3}$  haben die Dreiecke, die aus den Scheitelpunkten und den Schnittpunkten mit den Koordinatenachsen gebildet werden, den größten Flächeninhalt.

## F 4 Weitere Anwendungen der Integralrechnung

Begriffe und Methoden der Integralrechnung sind in verschiedensten Bereichen von Theorie und Praxis anwendbar. Im Abschnitt E 4 wurde mit der Berechnung von Flächeninhalten eine erste, grundlegende Anwendung der Integralrechnung ausführlich betrachtet. Nachfolgend sollen nun weitere innermathematische wie auch einige naturwissenschaftliche Probleme betrachtet werden, die sich mithilfe der Integralrechnung lösen lassen.

### F 4.1 Volumen und Mantelfläche von Rotationskörpern; Bogenlänge von Kurven

#### • Berechnung des Volumens von Rotationskörpern

Im Geometrieunterricht der Sekundarstufe I wurden verschiedene Körper (z. B. Prisma, Zylinder, Pyramide, Pyramidenstumpf, Kegel, Kegelstumpf, Kugel) betrachtet und dabei u. a. auch ihr Volumen, ihr Mantel- oder Oberflächeninhalt berechnet.

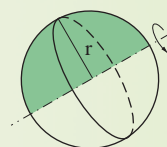
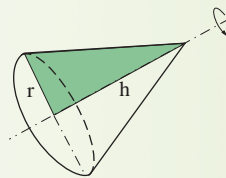
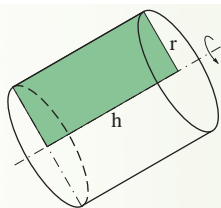
Einige dieser Körper kann man sich durch Rotation eines Flächenstückes unter einer Kurve um eine Achse erzeugt denken. Das Kurvenstück erzeugt dabei den Mantel dieses Körpers (Fig. F 28a–c). Die jeweilige Kurve bezeichnet man als erzeugende Kurve, die Achse als Rotationsachse.

Körper

Zylinder

Kegel

Kugel



Formel

$$V = \pi r^2 h$$

Fig. F 28a

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Fig. F 28b

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

Fig. F 28c

Solche Körper werden *Rotationskörper* genannt. Wir betrachten eine beliebige stetige Funktion  $f$  im Intervall  $[a; b]$  und lassen die Fläche unter dem zu  $f$  gehörenden Graphen um die  $x$ -Achse rotieren. Es entsteht ein Rotationskörper (Fig. F 29). Es soll nun das Volumen dieses Rotationskörpers berechnet werden. Die Lösung des Problems liefert uns ebenfalls die Integralrechnung. Dabei kann man analog zur Flächeninhaltsberechnung (Abschnitt E 2) vorgehen:

Wir teilen das Intervall  $[a; b]$  in  $n$  gleich lange Teilintervalle. Jedes Teilintervall hat dann die Länge  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ . Legt man durch die Intervallendpunkte Schnitte senkrecht zur  $x$ -Achse, so wird der Rotationskörper auf diese Weise in „Scheiben“ der Höhe  $\Delta x$  zerlegt.

Im  $k$ -ten Teilintervall sei  $f(\underline{x}_k)$  der kleinste und  $f(\bar{x}_k)$  der größte Funktionswert. Jeder der entstandenen „Scheiben“ kann dann ein (Kreis-)Zylinder mit der Höhe  $\Delta x$  und dem Grundkreisradius  $f(\underline{x}_k)$  (Grundflächeninhalt  $\pi[f(\underline{x}_k)]^2$ ) *einbeschrieben* und ein Zylinder mit der Höhe  $\Delta x$  und dem Grundkreisradius  $f(\bar{x}_k)$  (Grundflächeninhalt  $\pi[f(\bar{x}_k)]^2$ ) *umbeschrieben* werden. Setzt man die Zylinder

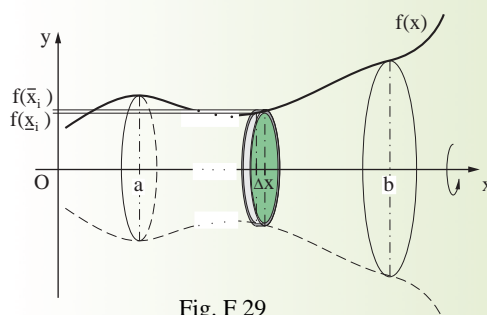


Fig. F 29

jeweils zusammen, so liegt das Volumen des Rotationskörpers zwischen den Volumina der beiden zusammengesetzten Körper, die sich als Summe der Zylindervolumina ergeben (Untersumme und Obersumme).

Es gilt:  $s_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot (f(\xi_i))^2 \cdot \Delta x$  und  $S_n = \sum_{i=1}^n \pi \cdot (f(\bar{\xi}_i))^2 \cdot \Delta x$  mit  $s_n \leq V \leq S_n$ .

Je feiner man die Zerlegung wählt, je größer also  $n$  und je kleiner demzufolge  $\Delta x$  wird, desto besser nähern sich die Summe der Volumina der einbeschriebenen Zylinder und die Summe der Volumina der umbeschriebenen Zylinder dem gesuchten Volumen an.

Wie im Abschnitt E 2 kann man zeigen: Die oben gekennzeichneten Folgen  $(s_n)$  und  $(S_n)$  sind monoton und beschränkt und besitzen somit jeweils einen Grenzwert. Die beiden Grenzwerte stimmen überein.

Da die Funktion  $f$  stetig ist, ist auch die Funktion  $g(x) = \pi \cdot (f(x))^2$  stetig und somit integrierbar.

Nach der Definition des bestimmten Integrals (Definition E 3) gilt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b \pi \cdot (f(x))^2 dx.$$

Das gesuchte Volumen ist also  $V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$ .

F 5

#### Satz F 5: Volumen eines Rotationskörpers

Es sei  $f$  eine über dem Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion. Dann besitzt der Körper, der durch Rotation der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a; b]$  um die  $x$ -Achse entsteht, das Volumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \cdot \int_a^b y^2 dx.$$

F 21

#### Beispiel F 21:

- a) Die Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f(x) = r$  rotiere im Intervall  $[0; h]$  um die  $x$ -Achse (Fig. F 30). Es ist das Volumen des entstehenden Rotationskörpers zu berechnen.

Wegen  $f(x) = r$ , also  $f^2(x) = r^2$  gilt  $V = \pi \cdot \int_0^h r^2 dx = \pi \cdot [r^2 \cdot x]_0^h$ .

Daraus folgt:  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$

Das ist die uns bekannte Formel für das Volumen eines Zylinders, den der Rotationskörper in dieser Aufgabe darstellt.

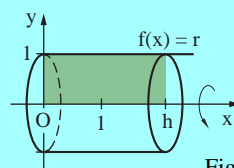


Fig. F 30

- b) Die Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f(x) = \sqrt{x}$  rotiert im Intervall  $[0; 5]$  um die  $x$ -Achse (Fig. F 31). Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers ist zu berechnen.

$$V = \pi \cdot \int_0^5 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \cdot \int_0^5 x dx = \pi \cdot \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \pi \cdot \frac{25}{2} \approx 39,27$$

Das Volumen beträgt rund 39,3 VE.

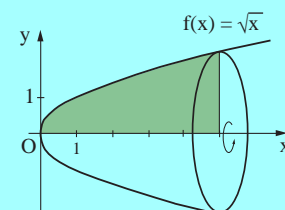


Fig. F 31

Erfolgt die Rotation um die  $y$ -Achse, so kann durch analoge Überlegungen die folgende Formel für im Intervall  $[a; b]$  eindeutige Funktionen gewonnen werden:

$$V = \pi \cdot \int_c^d x^2 dy \quad \text{mit } c = f(a) \text{ und } d = f(b)$$

Dabei ist  $x = g(y)$  die Umkehrfunktion zu  $y = f(x)$ .

Da in der Formel  $x^2$  benötigt wird, ist es bei Berechnungen häufig einfacher,  $y = f(x)$  nach  $x^2$  aufzulösen und nicht nach  $x$ .

Beispiel F 22:

Die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  und der  $y$ -Achse rotiere im Intervall  $[f(1); f(4)]$  um die  $y$ -Achse. Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers ist zu berechnen (Fig. F 32).

Weil  $f(x) = \frac{1}{2}x^2$  eine im Intervall  $[1; 4]$  eindeutige Funktion ist, existiert die Umkehrfunktion in diesem Intervall. Sie hat die Gleichung  $x = g(y) = \sqrt{2y}$ .

Die Integrationsgrenzen für die Berechnung des Rotationskörpers ergeben sich aus

$$c = f(1) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad d = f(4) = 8.$$

$$\text{Für das Volumen gilt dann: } V = \pi \cdot \int_{\frac{1}{2}}^8 2y \, dy = \pi \cdot [y^2]_{\frac{1}{2}}^8 = \pi \cdot (64 - \frac{1}{4}) = \pi \cdot \frac{255}{4} \approx 200,3$$

Der Rotationskörpers besitzt ein Volumen von rund 200 VE.

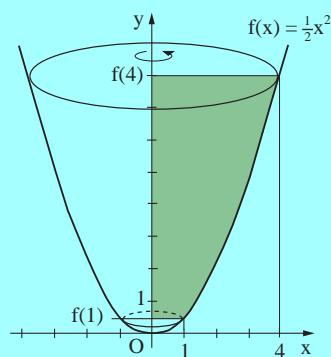


Fig. F 32

F 22

Beispiel F 23:

Um das Volumen des auf Seite S. 177 beschriebenen Luftschiffs näherungsweise zu ermitteln, kann dieses Luftschiff als ein Körper aufgefasst werden, der bei Rotation der in Fig. F 33 gekennzeichneten Fläche um die  $x$ -Achse entsteht. Für die Berechnung ist es erforderlich, eine geeignete Funktionsgleichung des zugehörigen Graphens aufzustellen. Dafür gibt es verschiedene Möglichkeiten.

- (1) Eine erste, allerdings sehr grobe, Näherung erhält man, wenn der Graph als Bogen einer Parabel 2. Grades aufgefasst wird. In  $f(x) = ax^2 + b$  wäre dann  $b = -32,5$  und mit  $P_{1/2}(\pm 130; 0)$  erhielte man aus  $a \cdot 130^2 - 32,5 = 0$  die Funktionsgleichung  $y = f(x) = \frac{32,5}{130^2}x^2 - 32,5$  ( $-130 \leq x \leq 130$ ). Damit wäre

$$V = \pi \int_{-130}^{130} \left( \frac{32,5}{130^2}x^2 - 32,5 \right)^2 dx \approx 460\,139 \text{ (m}^3\text{)} \quad (\text{Fig. F 34, obere Zeile})$$

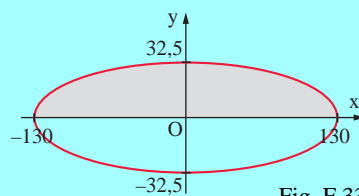


Fig. F 33

F 23

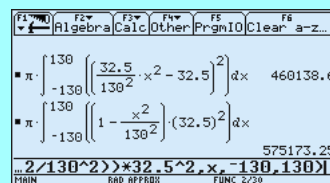


Fig. F 34



(2) Eine bessere Näherung ergibt sich, wenn man den Achsenschnitt als eine Ellipse mit den Halbachsen  $a = 130$  und  $b = 32,5$  auffasst. Aus  $\frac{x^2}{130^2} + \frac{y^2}{32,5^2} = 1$  ergibt sich dann

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{130^2}\right) \cdot 32,5^2 \text{ und damit für das Volumen}$$

$$V = \pi \int_{-130}^{130} \left(1 - \frac{x^2}{130^2}\right) \cdot 32,5^2 dx \approx 575\,173 \text{ (m}^3\text{)} \text{ (Fig. F 34, untere Zeile)}$$

Diese zweite Näherung kommt dem vom Hersteller angegebenen Volumen von  $550\,000 \text{ m}^3$  relativ nahe.

#### • Berechnung der Bogenlänge ebener Kurven

Die Bogenlänge ebener Kurven wurde bislang nur für die Sonderfälle des Umfangs eines Kreises und der Länge eines Kreisbogens betrachtet. Die Überlegungen sollen nun auf die Graphen beliebiger stetiger Funktionen ausgedehnt werden.

Eine Kurve sei in einem Intervall  $[a; b]$  als Graph einer Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  gegeben. Es soll die Länge  $s$  des Kurvenbogens zwischen den Punkten  $P$  und  $Q$  berechnet werden. (**Rektifikation** einer Kurve).

Dazu betrachten wir zunächst das Bogenelement  $ds$ .

Es gilt

$$(ds)^2 \approx (dx)^2 + (dy)^2, \text{ also } ds \approx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

Bildet man die Summe aller zwischen  $P$  und  $Q$  liegenden Bogenelemente und lässt ihre Anzahl durch immer feinere Unterteilung gegen  $\infty$  gehen, *integriert* man also, so

ergibt sich für die Bogenlänge der Kurve der Funktion mit der Gleichung  $y = f(x)$  im Intervall  $[a; b]$

$$\text{(zwischen den Punkten } P \text{ und } Q) \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

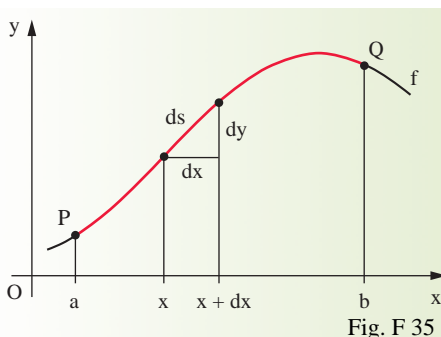


Fig. F 35

#### F 6

##### Satz F 6: **Bogenlänge**

Es sei  $f$  eine über dem Intervall  $[a; b]$  differenzierbare Funktion. Dann besitzt der Bogen des Graphen von  $f$  im Intervall  $[a; b]$  die Länge

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

#### F 24

Beispiel F 24:

a) Kreis:

Mithilfe von Satz F 6 soll die bekannte Formel für den Kreisumfang bestätigt werden.

Aus der Kreisgleichung  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $0 \leq x \leq r$ ) erhält man durch Umformen und

Differenzieren  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  und  $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$  Nach Einsetzen in die obige Formel für

die **Bogenlänge** ergibt sich für einen Viertelkreis:

$$\frac{s}{4} = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

Wir berechnen dieses Integral mittels eines GTA (Fig. F 36b) und erhalten  $\frac{s}{4} = \frac{\pi|r|}{2}$ , woraus für den Umfang des Vollkreises  $u = 2\pi r$  folgt.

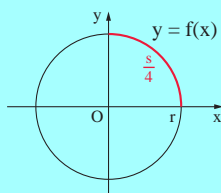


Fig. F 36a

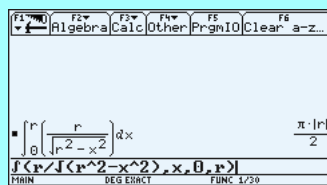


Fig. F 36b

## b) Asteroide

Gleichung:  $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$  bzw.  $y = \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

Damit gilt:  $y' = \frac{3}{2} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(-\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}\right) = -x^{-\frac{1}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$

Durch Einsetzen in obige Formel ergibt sich für die Bogenlänge eines Viertels der Asteroide:

$$\begin{aligned} \frac{s}{4} &= \int_0^a \sqrt{1 + x^{\frac{2}{3}} \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)} dx = \int_0^a \sqrt{1 + a^{\frac{2}{3}} x^{-\frac{2}{3}} - 1} dx \\ &= \int_0^a \frac{1}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = \left[\frac{3}{2} a^{\frac{2}{3}} x^{\frac{2}{3}}\right]_0^a = \frac{3}{2} a \end{aligned}$$

Für die gesamte Kurve erhält man somit  $s = 6a$ .

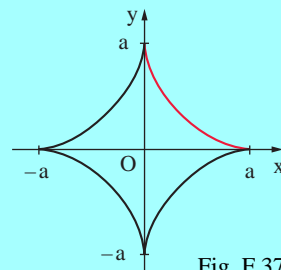


Fig. F 37

Berechnung für  $a = 5$  durch GTA im Grafik-Menü mittels **(F5) (Math)** **(B) (Arc)** und Grenzeingabe

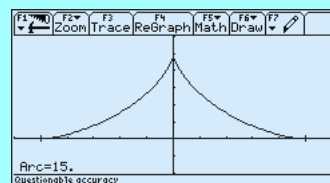


Fig. F 38

## c) Schleife

Gleichung:  $9ay^2 = x(x-3a)^2 \quad (a > 0, x \geq 0)$

$y = \sqrt{\frac{x(x-3a)^2}{9a}} = \frac{3a-x}{3} \sqrt{\frac{x}{a}} \quad (\text{weil } x-3a \leq 0, \text{ denn } x-3a \geq 0 \text{ würde zu } x \geq 3a \text{ führen});$

$y' = \frac{a-x}{2\sqrt{ax}}$

$s = \int_0^x \sqrt{1 + \frac{(a-x)^2}{4ax}} dx = \int_0^x \frac{x+a}{2\sqrt{ax}} dx = \frac{1}{3} (x+3a) \sqrt{\frac{x}{a}}$

Für die halbe Schleife erhält man mit  $x = 3a$

$\frac{s}{2} = 2a\sqrt{3}$ , woraus  $s = 4a\sqrt{3}$  folgt.

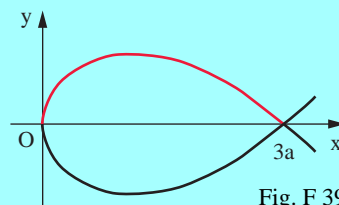


Fig. F 39

• Berechnung der Mantelfläche bzw. der Oberfläche von Rotationskörpern

Es sei nun wieder eine Kurve als Graph einer Funktion  $f$  mit der Gleichung  $y = f(x)$  gegeben. Rotiert diese Kurve im Intervall  $[a; b]$  um die  $x$ -Achse, so überstreicht sie dabei die Mantelfläche des entstehenden Rotationskörpers. Das Kurvenstück (der Kurvenbogen) im Intervall  $[a; b]$  wird nun in Bogenelemente  $ds$  zerlegt.

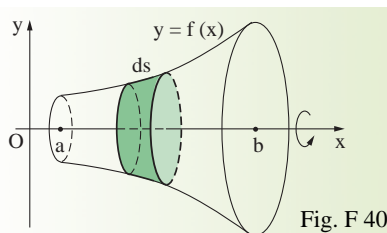


Fig. F 40

Eines dieser Bogenelemente für sich betrachtet überstreicht dann die dargestellte Teilfläche der Mantelfläche. Es handelt sich um ein schmales reifenförmiges Band, aufgeschnitten näherungsweise ein Rechteck mit den Seitenlängen  $2\pi y$  und  $ds$ , das demzufolge den Flächeninhalt  $dA \approx 2\pi y \cdot ds$  besitzt. Hieraus ergibt sich (in Analogie zu den Überlegungen bei der Bogenlängeberechnung) durch Integration als Mantelfläche des Rotationskörpers im Intervall  $[a; b]$ :  $A_M = 2\pi \int_a^b y ds$

Wegen  $ds = \sqrt{1+y'^2} dx$  (s. S. 206) folgt  $A_M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx$ .

F 7

### Satz F 7: Mantelflächeninhalt eines Rotationskörpers

Es sei  $f$  eine über dem Intervall  $[a; b]$  differenzierbare Funktion. Dann besitzt der Körper, der durch Rotation der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $f$  über dem Intervall  $[a; b]$  um die  $x$ -Achse entsteht, den Mantelflächeninhalt

$$A_M = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+y'^2} dx.$$

Soll die Oberfläche eines Rotationskörpers berechnet werden, so sind die Flächeninhalte der Grund- und der Deckfläche zur Mantelfläche zu addieren, falls die erzeugende Kurve nicht mit einer Nullstelle von  $f$  beginnt oder endet.

F 25

### Beispiel F 25:

#### a) Oberflächeninhalt einer Kugel

Wir betrachten zunächst die Halbkugel. Die Oberfläche der Halbkugel wird erzeugt durch die Drehung eines Viertelkreises um die  $x$ -Achse (Fig. F 41).

Gleichung:  $x^2 + y^2 = r^2$  ( $0 \leq x \leq r$ )

Durch Umformen folgt  $y = \sqrt{r^2 - x^2}$  und  $y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ , also

$$\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \text{ Für die Mantelfläche ergibt sich}$$

$$\text{damit: } A_M = 2\pi \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^r r dx = 2\pi r^2$$

Für die Oberfläche der Kugel folgt daraus die bekannte Formel  $A_O = 4\pi r^2$ .

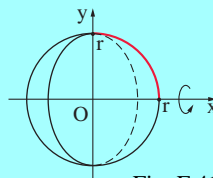


Fig. F 41

#### b) Mantelflächeninhalt eines Rotationsparaboloids, der durch Rotation des Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$ im Intervall $[0; r]$ um die $x$ -Achse entsteht

Durch Einsetzen von  $y = \sqrt{x}$  und  $y'^2 = \frac{1}{4x}$  in die Gleichung für die Mantelfläche folgt:

$$\begin{aligned} A_M &= 2\pi \int_0^r \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} dx = 2\pi \int_0^r \sqrt{x + \frac{1}{4}} dx \\ &= \frac{4\pi}{3} \sqrt{\left(x + \frac{1}{4}\right)^3} \Big|_0^r = \frac{4\pi}{3} \left( \sqrt{\left(r + \frac{1}{4}\right)^3} - \frac{1}{8} \right) \end{aligned}$$

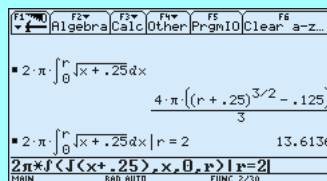


Fig. F 42

Für  $r = 2$  (LE) erhält man  $A_M \approx 13,61$  FE. Fig. F 42 zeigt die gesamte Rechnung unter Verwendung eines GTA.

Aus Fig. F 43 lässt sich überdies erkennen, dass auch bei Einsatz von GTA eine vorherige Vereinfachung des einzugebenden Terms vorteilhaft sein kann: Verwendet man sofort  $\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$ , ohne vorher zu  $\sqrt{x + \frac{1}{4}}$  zu vereinfachen, ist der auf dem Bildschirm

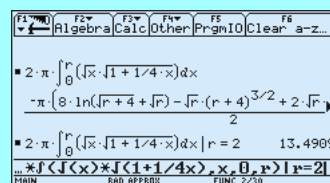


Fig. F 43

(hier nur unvollständig) erscheinende Resultatsterm wesentlich komplizierter als im zweiten Fall und der Näherungswert für  $r = 2$  ungenauer. Bei Einsetzen in obige Formel erhält man  $A_M \approx 13,61357$  FE.

## F 4.2 Physikalische Probleme

In der Physik und in den anderen Naturwissenschaften findet die Integralrechnung vor allem als eine Grundlage für das Lösen von Differentialgleichungen Anwendung (s. Abschnitt F 5). Bedeutsam sind aber auch Probleme, die sich durch das Deuten physikalischer Größen als Flächeninhalte bearbeiten lassen.

### • Physikalische Arbeit

Aus dem Physikunterricht ist bekannt: Wird ein Körper längs eines Weges  $s$  von  $s_1$  nach  $s_2$  (also um das Wegstück  $\Delta s$ ) unter Einwirkung einer konstanten Kraft  $F$  bewegt, so gilt für die verrichtete Arbeit  $W$

$W = F \cdot \Delta s$ , falls Kraft- und Wegrichtung übereinstimmen (denn Kraft und Weg sind bekanntlich gerichtete Größen) (Fig. F 44), und

$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos \alpha$ , falls die Kraft- und die Wegrichtung den Winkel  $\alpha$  einschließen.

Betrachten wir die Kraft  $F$  als Funktion des Weges  $s$ , so stellt das Diagramm in Fig. F 45 diesen Zusammenhang dar:

Die Funktion  $F(s)$  ist eine konstante Funktion – ihr Graph verläuft demzufolge parallel zur  $s$ -Achse.

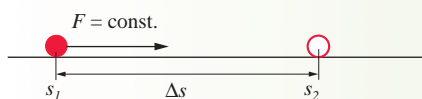


Fig. F 44

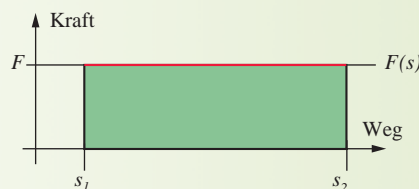


Fig. F 45

Die verrichtete Arbeit kann nun als Inhalt der Fläche unter dem Graphen der Funktion  $F(s)$  interpretiert werden, d. h., die Maßzahlen von  $W$  und vom Flächeninhalt des gekennzeichneten Rechtecks sind gleich.

Bei vielen physikalischen Vorgängen bleibt die Kraft aber nicht konstant, sondern sie verändert sich sprunghaft oder auch kontinuierlich – Letzteres z. B. beim Spannen einer Schraubenfeder. Unser Ziel ist es, für diese Fälle ebenfalls eine Formel zur Berechnung der Arbeit zu finden.

Ändert sich die Kraft, die an dem Körper angreift, „sprunghaft“, d. h., ist sie stückweise konstant, so entsteht als Graph des funktionalen Zusammenhangs zwischen Kraft und Weg die nebenstehende Treppenkurve (Fig. F 46).

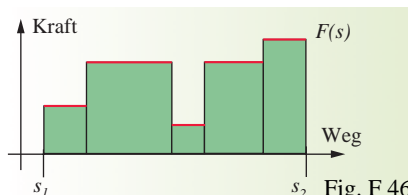


Fig. F 46

In diesem Fall wäre die Arbeit gleich dem Inhalt der Fläche unter der Treppenkurve im Intervall  $[s_1; s_2]$  und sie könnte als Summe der Teilflächen (Streifen) berechnet werden.

Verändert sich die Kraft  $F$  längs des Weges  $s$  ständig, d. h., ist die Funktion  $F(s)$  nicht einmal stückweise konstant, sondern nur stetig, so kann die physikalische Arbeit nicht mehr elementar berechnet werden. Aber auch in diesem Fall wird sie **geometrisch als Inhalt der Fläche gedeutet**, die der Graph der Funktion  $F(s)$  mit der  $s$ -Achse in den Grenzen  $s_1$  und  $s_2$  einschließt (Fig. F 47).

Mit den Mitteln der Integralrechnung kann diese Fläche berechnet werden. Es gilt:

Wird ein Körper von einer Kraft  $F$  längs des Weges  $s$  von  $s_1$  nach  $s_2$  bewegt und stimmen die Kraft- und die Wegrichtung überein, so beträgt die verrichtete physikalische Arbeit

$$W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds.$$

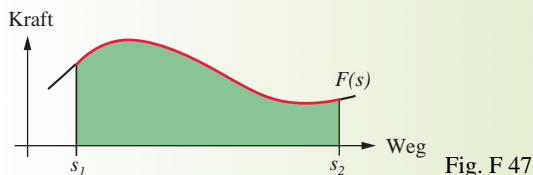


Fig. F 47

Das bestimmte Integral gibt dabei nur die Maßzahl der physikalischen Arbeit an – die Einheit ist gesondert zu überlegen.

## F 26

## Beispiel F 26:

An einer Schraubenfeder sei ein Körper befestigt. Es ist die Arbeit zu berechnen, die verrichtet werden muss, wenn der Körper von  $s_1$  nach  $s_2$  bewegt werden soll (Fig. F 48).

Die Feder wird bei diesem Vorgang gespannt. Die dazu erforderliche Kraft, die der Zugkraft der Feder entgegenwirkt, ist dem zurückgelegten Weg proportional:

$F(s) = D \cdot s$  HOOKEsches Gesetz (Der Proportionalitätsfaktor  $D$  heißt hier Federkonstante.)

Die aufzuwendende Arbeit  $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s) ds$  beträgt für den vorliegenden Fall:

$$W = \int_{s_1}^{s_2} D \cdot s ds = \left[ \frac{D}{2} s^2 \right]_{s_1}^{s_2} = \frac{D}{2} (s_2^2 - s_1^2).$$

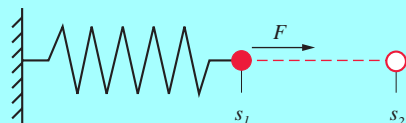


Fig. F 48

Für eine Schraubenfeder mit der Federkonstanten  $D = 10 \text{ Nm}^{-1}$  und einer Ausdehnung von 0 auf 20 cm gilt dann  $W = \frac{10}{2} \text{ Nm}^{-1} (0,2^2 - 0^2) \text{ m}^2 = 0,2 \text{ Nm}$ .

Mit diesen Kenntnissen kann auch die Formel für die Federspannarbeit gewonnen werden.

Es gilt:  $W = \frac{1}{2} D s^2$

- Schwerpunkt von Flächen

Aus dem Physikunterricht ist bekannt: Greift an einem starren und um eine Achse drehbaren Körper (Fläche) eine Kraft  $\vec{F}$  an, so wirkt ein Drehmoment  $M$  und es gilt  $M = F \cdot a$ . Dabei ist  $a$  der Abstand der Wirkungslinie der Kraft von der Drehachse (Fig. F 49), auch „Hebelarm“ genannt, und  $F$  der Betrag der Kraft  $\vec{F}$ .

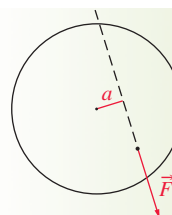


Fig. F 49

Denkt man sich nun eine Fläche, die gleichmäßig mit Masse belegt ist, in kleine Massenelemente aufgeteilt, so greift an jedem Massenelement  $m$  die Gewichtskraft an. Dadurch entsteht ein Drehmoment bezüglich einer beliebigen Drehachse.

1) Vereinbarung sei, dass beim Auftreten von Größensymbolen innerhalb von Differentiationen oder Integrationen stets nur die jeweiligen Maßzahlen gemeint sind.

Bezeichnet man die auf die Fläche bezogene Massedichte mit  $\mu$ , die Erdbeschleunigung mit  $g$  und die Größe des einzelnen Flächenelements mit  $\Delta A$ , so gilt für das Massenelement  $\Delta m$

$$\Delta m = \mu \cdot \Delta A$$

und für die auf dieses Massenelement wirkende Gewichtskraft

$$g \cdot \Delta m = g \cdot \mu \cdot \Delta A.$$

Für den auf das Massenelement  $\Delta m$  entfallenden Anteil  $\Delta M$  des Gesamtdrehmoments folgt dann

$$\Delta M = g \cdot \mu \cdot \Delta A \cdot a.$$

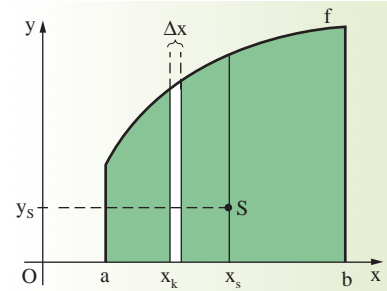


Fig. F 50

Nun gibt es zu einer Fläche (einem Körper) genau einen Punkt S, der durch folgende Eigenschaft gekennzeichnet ist: Legt man durch S eine beliebige Achse, so hat die Summe der Drehmomente aller Massenelemente der Fläche (des Körpers) bezüglich dieser Achse die Maßzahl 0. Dieser Punkt wird als „*Schwerpunkt*“ bezeichnet. Seine Lage (seine Koordinaten) zu kennen ist wichtig für das Lösen vieler physikalischer und technischer Probleme.

Die zu untersuchende Fläche habe beispielsweise die Gestalt wie in Fig. F 50. Der Inhalt dieser Fläche

hat dann die Flächenmaßzahl  $A = \int_a^b f(x) dx$ . Zur Ermittlung der Koordinaten  $x_s$  und  $y_s$  des

Schwerpunktes wird durch S eine zur y-Achse parallele Achse gelegt. Dann besitzen alle Massenelemente, die auf einem schmalen, zur y-Achse parallelen Streifen der Breite  $\Delta x$  liegen, nahezu das gleiche Drehmoment bezüglich der gewählten Schwerelinie. Der Streifen hat die Flächenmaßzahl  $f(x_k) \cdot \Delta x$ . Für das Drehmoment des Streifens gilt  $\Delta M_k \approx g \cdot \mu \cdot f(x_k) \cdot \Delta x \cdot (x_s - x_k)$ .

Um das Gesamtdrehmoment zu ermitteln, ist nun die Summe der Drehmomente aller Streifen der Fläche zu bilden und der Grenzwert dieser Summe mit  $\Delta x \rightarrow 0$  zu berechnen. Es ergibt sich so das folgende Integral:

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta x \rightarrow 0)}} \sum_{k=1}^n \Delta M_k = \int_a^b g \cdot \mu \cdot f(x) \cdot (x_s - x) dx$$

Da die Achse durch den Schwerpunkt gehen soll, ist dieses Integral gleich 0. Wegen  $g, \mu \neq 0$  gilt

$$x_s \int_a^b f(x) dx - \int_a^b x \cdot f(x) dx = 0, \text{ woraus folgt}$$

$$x_s = \frac{\int_a^b x \cdot f(x) dx}{\int_a^b f(x) dx}. \text{ Durch analoge Überlegungen ergibt sich } y_s = \frac{\frac{1}{2} \int_a^b [f(x)]^2 dx}{\int_a^b f(x) dx}.$$

### Beispiel F 27:

Es ist der Schwerpunkt der nebenstehenden Dreiecksfläche zu ermitteln (Fig. F 51).

$$A = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 \left(-\frac{x}{2} + 1\right) dx = 1$$

$$\int_0^2 x \cdot f(x) dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^2}{2} + x\right) dx = \left[-\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

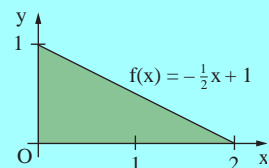


Fig. F 51

$$\int_0^2 [f(x)]^2 dx = \int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^2}{2} + x\right]_0^2 = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3}$$

Somit ist  $x_S = \frac{2}{3}$  und  $y_S = \frac{1}{3}$ .

### • Bewegungsabläufe

Im Abschnitt E 2.1 wurde eingangs ein Problem aus der Kinematik, das „Fahrtenschreiberproblem“, gestellt und mithilfe der Integralrechnung gelöst. Wir gelangten letztlich zu dem Resultat, dass bei einer beliebigen Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v(t)$  für den im Zeitintervall  $[t_1; t_2]$  zurückgelegten

Weg gilt (s. S. 152):  $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$

Ein analoger Zusammenhang besteht zwischen der Beschleunigung-Zeit-Funktion  $a(t)$  und der Geschwindigkeit-Zeit-Funktion  $v(t)$ :  $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t) dt$

### F 28

Beispiel F 28:

Unter Verwendung der oben genannten Gleichungen für den Weg und die Geschwindigkeit sollen die Formeln für den freien Fall eines Körpers gewonnen werden.

Zum Zeitpunkt  $t = 0$  seien die Geschwindigkeit des betrachteten Körpers  $v = 0$  und die bislang zurückgelegte Fallstrecke  $s = 0$ . Beim freien Fall eines Körpers ist die Beschleunigung konstant – es gilt  $a(t) = g$ .

Daraus folgt dann

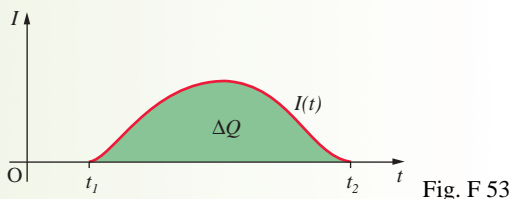
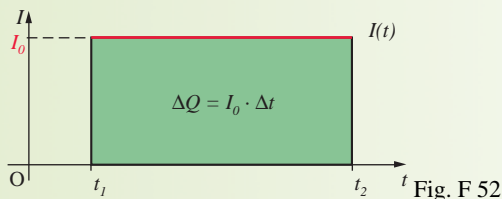
- für die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t_0$ :  $v = \int_0^{t_0} g dt = [g \cdot t]_0^{t_0} = g \cdot t_0$ ;
- für den in der Zeit  $t_0$  zurückgelegten Fallweg:  $s = \int_0^{t_0} g \cdot t dt = \left[\frac{g}{2} \cdot t^2\right]_0^{t_0} = \frac{g}{2} t_0^2$ .

Da diese Aussage für eine beliebige Zeitdauer  $t$  gilt, können wir auch  $v = g \cdot t$  und  $s = \frac{g}{2} t^2$  schreiben.

### • Elektrische Ladung

Die elektrische Ladung  $Q$  ist eine weitere physikalische Größe, die mittels der Integralrechnung besser gefasst werden kann.

Wenn ein Strom mit der konstanten Stromstärke  $I_0$  während der Zeit  $t$  fließt (Fig. F 52), so wird die elektrische Ladung  $Q = I_0 \cdot t$  transportiert. Solche Bedingungen lassen sich in einem Experiment schaffen, doch bei Vorgängen in der Praxis treten meist zeitlich veränderliche Ströme auf (Fig. F 53).





Auch für den letztgenannten Fall kann die Ladungsberechnung auf dem Wege über die Berechnung des Inhalts der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse mathematisch gelöst werden. Es gilt:

$$\Delta Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t) dt$$

Beispiel F 29:

Der Strom-Zeit-Verlauf sei durch die Funktionsgleichung  $I(t) = 0,5 t^3$  gegeben. Es ist zu ermitteln, welche Ladung während der zweiten Sekunde fließt.

$$Q = \int_1^2 0,5 t^3 dt = \left[ \frac{1}{8} t^4 \right]_1^2 = 2 - \frac{1}{8} = \frac{15}{8} \text{ } ^{1)} \quad \text{Das heißt: Die Ladung beträgt rund } 1,9 \text{ As} = 1,9 \text{ C.}$$

F 29

## F 5 Differentialgleichungen

### F 5.1 Der Begriff *Differentialgleichung*

Aus der Integralrechnung sind Aufgaben bekannt, bei denen beispielsweise zu  $f_1'(x) = x^2 + 2$ ;  $f_2'(x) = \sqrt{x}$ ,  $f_3'(x) = g(x)$  jeweils die Funktion  $f_i$  zu bestimmen ist. Gelöst werden solche Aufgaben durch Integration und als Lösung erhält man in jedem Fall ganze Funktionsscharen. Für die Beispiele ergeben sich so folgende Lösungen:

$$f_1(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + c, c \in \mathbb{R} \text{ bel.}, \quad f_2(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + c, c \in \mathbb{R} \text{ bel.}, \quad f_3(x) = \int g(x) dx$$

Wäre nun auf der rechten Seite der obigen Beispiele auch die jeweils gesuchte Funktion enthalten, so würde man Gleichungen wie  $f_4'(x) = f_4(x)$  oder  $f_4'(x) = -f_4(x) + 2$  erhalten, die auf den ersten Blick völlig neuartig sind. Nachfolgend soll jedoch gezeigt werden, dass sich eine ganze Reihe dieser neuen Gleichungen mit bereits bekannten Hilfsmitteln aus der Analysis lösen und vor allem auch für die Bearbeitung wichtiger Klassen inner- und außermathematischer Probleme anwenden lässt.

Definition F 1:

Jede Gleichung über einer<sup>2)</sup> Variablen  $x \in V$ , mit der eine Funktion  $y = f(x)$  gesucht wird und die mindestens eine Ableitung der gesuchten Funktion  $f$  nach der Variablen  $x$  enthält, heißt **Differentialgleichung**.

F 1

Beispiel F 30:

Folgende Gleichungen sind *Differentialgleichungen*. Mit jeder Gleichung wird die Funktion  $f$  gesucht und jede Gleichung enthält eine Ableitung der gesuchten Funktion  $f$ .

a)  $f'(x) = 3x^2$  mit  $x \in \mathbb{R}$

b)  $f'(x) - r \cdot f(x) = 0$  mit  $x, r \in \mathbb{R}$

c)  $f'(x) = r \left( 1 - \frac{f(x)}{G} \right) f(x)$  mit  $x, r, G \in \mathbb{R}, r \geq 0, G > 0$

d)  $f'(x) = -\frac{x}{f(x)}$   $x \in \mathbb{R}$  mit  $f(x) \neq 0$

e)  $f'(x) + f(x) - 2 = 0$  mit  $x \in \mathbb{R}$

f)  $f''(x) + 4f(x) = 0$  mit  $x \in \mathbb{R}$

F 30

<sup>1)</sup> Die Einheiten werden gesondert betrachtet.

<sup>2)</sup> Hängt die gesuchte Funktion  $f$  nur von *einer* Variablen ab, so wird die Differentialgleichung auch *gewöhnliche* Differentialgleichung genannt. Sind mehrere unabhängige Variablen vorhanden, so handelt es sich um *partielle* Differentialgleichungen. Diese sollen hier nicht behandelt werden.

*Bemerkungen:*

- In vielen Fällen kann eine Differentialgleichung so umgestellt werden, dass die höchste in der Gleichung vorkommende Ableitung  $f^{(n)}(x)$  allein auf einer Seite der Gleichung steht. Man nennt diese Form die *explizite Darstellung* der Differentialgleichung im Gegensatz zu einer *impliziten Darstellung*. So handelt es sich bei  $f(x) = f'(x) \cdot x$  um eine implizite, bei  $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$  dagegen um die explizite Darstellung derselben Differentialgleichung.
- In Differentialgleichungen schreibt man statt  $f(x)$  häufig auch  $y$ . Die soeben betrachtete Differentialgleichung würde dann kürzer  $y' = \frac{y}{x}$  lauten.
- Ist die erste Ableitung die höchste auftretende Ableitung, so lautet die explizite Darstellung der Differentialgleichung  $f'(x) = G(x; f(x))$  (bzw.  $y' = G(x; y)$ ), wobei  $G$  ein mathematischer Ausdruck ist, der  $x$  und  $f(x)$  enthält.

**F 5.2 Arten von Differentialgleichungen**

Ein grundlegendes Unterscheidungsmerkmal von Differentialgleichungen ist ihre *Ordnung*.

**F 2****Definition F 2:**

Unter der **Ordnung einer Differentialgleichung** versteht man die Ordnung der höchsten auftretenden Ableitung der gesuchten Funktion in der Differentialgleichung.

Beispielsweise ist  $f''(x) + 4f(x) = 0$  eine Differentialgleichung 2. Ordnung und  $f'(x) - r f(x) = 0$  eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

Neben der Ordnung ist die *Linearität* einer Differentialgleichung ein wichtiges Einteilungsmerkmal. Eine Differentialgleichung ist linear, wenn die enthaltenen Ausdrücke  $f(x)$ ,  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  bis  $f^{(n)}(x)$  nur in erster Potenz vorkommen und wenn sie lediglich durch Addition oder Subtraktion miteinander verknüpft sind. Bis zur zweiten Ordnung bedeutet das:

**F 3****Definition F 3:****Eine Differentialgleichung**

1. Ordnung nennt man **linear**, wenn sie sich in der Form  $f'(x) + Q f(x) = S$

2. Ordnung nennt man **linear**, wenn sie sich in der Form  $f''(x) + Q f'(x) + R f(x) = S$

schreiben lässt.

Dabei sind  $Q$ ,  $R$  und  $S$  gegebene Funktionen von  $x$  oder auch Zahlen. In letzterem Fall charakterisiert man die Koeffizienten durch Kleinbuchstaben.

Die jeweils rechte Seite der obigen Gleichungen – also  $S$  – wird als die *Inhomogenität* der linearen Differentialgleichung bezeichnet.

Bei den linearen Differentialgleichungen unterscheidet man ferner zwischen *homogenen* und *inhomogenen* Differentialgleichungen.

**F 4****Definition F 4:**

Eine lineare Differentialgleichung 1. oder 2. Ordnung heißt **homogen**, wenn ihre Inhomogenität identisch 0 ist. Anderenfalls heißt die lineare Differentialgleichung **inhomogen**.

## Beispiel F 31: Ordnung, Linearität und Homogenität von Differentialgleichungen

F 31

Differentialgleichung	Ordnung	linear/nichtlin.	homogen/inhomogen
a) $\mathbf{f'(x) - r f(x) = 0}$	1	linear	homogen
b) $\mathbf{f'(x) + f(x) - 2 = 0}$ bzw. $\mathbf{f'(x) + f(x) = 2}$	1	linear	inhomogen
c) $\mathbf{f''(x) + 4f(x) = 0}$	2	linear	homogen
d) $\mathbf{f'(x) = -\frac{x}{f(x)}}$	1	nichtlinear	–

Die Ordnung der einzelnen Differentialgleichungen ergibt sich aus den fett gedruckten höchsten Ableitungen. Differentialgleichung b) enthält die Inhomogenität 2; Differentialgleichung d) ist nichtlinear, da die Funktion  $f(x)$  auf der rechten Seite der Gleichung den Exponenten  $-1$  besitzt.

## F 5.3 Zum Lösungsverhalten von Differentialgleichungen

## Definition F 5:

F 5

Eine Funktion  $f_L$  mit der Gleichung  $y = f_L(x)$  heißt **Lösung einer Differentialgleichung** mit dem Grundbereich  $V$ , wenn sie die Differentialgleichung für alle  $x \in V$  zu einer wahren Aussage macht.

Beispiel F 32: Lösung der Differentialgleichung  $f'(x) = 2f(x)$  mit  $x \in \mathbb{R}$ 

F 32

Es soll überprüft werden, ob die Funktion

- a)  $f_1(x) = 2x$                       b)  $f_2(x) = e^{2x}$                       c)  $f_3(x) = c \cdot e^{2x}, x \in \mathbb{R}$   
eine **Lösung der Differentialgleichung**  $f'(x) = 2f(x)$  ist.

Zu a): (1) **Einsetzen:**  $LS: f_1'(x) = 2$ ,  $RS: 2f_1(x) = 4x$ , also  $2 = 4x$   
(2) **Auswertung:** Die Gleichung ist nur wahr für  $x = 0,5$ , also nicht für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  
(3) **Schlussfolgerung:** Die Funktion  $f_1(x) = 2x$  ist **keine Lösung** von  $f'(x) = 2f(x)$ .

Zu b): (1) **LS:**  $f_2'(x) = 2e^{2x}$ ,  $RS: 2f_2(x) = 2e^{2x}$ , also  $2e^{2x} = 2e^{2x}$   
(2) Die erhaltene Gleichung ist wahr für alle  $x \in \mathbb{R}$ .  
(3) Die Funktion  $f_2(x) = e^{2x}$  ist **eine Lösung** von  $f'(x) = 2f(x)$ .

Zu c): (1) **LS:**  $f_3'(x) = c \cdot 2 \cdot e^{2x}$ ,  $RS: 2f_3(x) = 2 \cdot c \cdot e^{2x}$ , also  $2c \cdot e^{2x} = 2c \cdot e^{2x}$   
(2) Die erhaltene Gleichung ist wahr für alle  $x \in \mathbb{R}$  und  $c \in \mathbb{R}$ .  
(3) Alle Funktion  $y = f_3(x) = c \cdot e^{2x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  bel., sind **Lösungen** von  $f'(x) = 2f(x)$ .

Die durch  $f_3(x) = c \cdot e^{2x}$  charakterisierte **Lösungschar** (Fig. F 54) der Differentialgleichung enthält für  $c = 0$  die Lösung  $f_3(x) = 0$  und für  $c = 1$  die Lösung  $f_3(x) = e^{2x}$ .

Differentialgleichungen – so sie überhaupt lösbar sind – besitzen eine ganze Schar von Lösungsfunktionen, die der gleichen Grundgleichung gehorchen, sich aber durch einen oder mehrere Scharparameter voneinander unterscheiden. Die Lösung der Differentialgleichung 1. Ordnung aus Beispiel F 32 c) besitzt den einen Scharparameter  $c$ . Durch die Wahl des Wertes von  $c$  bleibt der exponentielle Verlauf der jeweiligen Lösungsfunktion unberührt. Der Wert von  $c$  bestimmt aber,

durch welche Punkte  $P(x; y)$  der Graph der Lösungsfunktion verläuft. Damit ist die Möglichkeit gegeben, aus der Lösungsschar eine spezielle Lösung auszuwählen, die durch einen vorgegebenen Punkt  $P_0(x_0; y_0)$  verläuft. Eine derartige Aufgabenstellung heißt *Anfangswertproblem*. Ein Anfangswertproblem kann i. Allg. leicht gelöst werden, wenn eine Lösungsschar vorliegt.

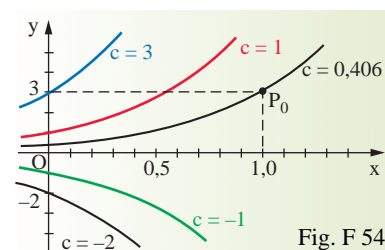


Fig. F 54

F 33

### Beispiel F 33: Anfangswertproblem

Geucht ist eine Lösung der Differentialgleichung  $f'(x) = 2f(x)$  unter der Bedingung  $y_0 = f(1) = 3$ . Nach Beispiel F 32 c) ist  $f(x) = c \cdot e^{2x}$  eine Lösungsschar der Differentialgleichung. Aus der Anfangsbedingung folgt:  $y_0 = 3 = c \cdot e^{2 \cdot 1} = c \cdot e^2$ , also  $c = \frac{3}{e^2} \approx 0,406$ . Die Funktion  $y = f(x) = \frac{3}{e^2} \cdot e^{2x} = 3 \cdot e^{2x-2}$  ist diejenige Lösung der Differentialgleichung  $f'(x) = 2f(x)$ , die durch den Punkt  $P_0$  geht, also der Anfangsbedingung  $f(1) = 3$  genügt (Fig. F 54).

Ob eine gegebene Funktion Lösung einer *Differentialgleichung 2. Ordnung* ist, wird analog zu Beispiel F 32 geprüft. Allerdings kann eine Lösungsschar jetzt *zwei* Parameter besitzen und es werden *zwei* Anfangsbedingungen vorliegen. Das führt beim Lösen des Anfangswertproblems auf ein Gleichungssystem mit zwei Unbekannten. Anfangsbedingungen können sowohl die Funktion selbst also auch eine Ableitung der Funktion betreffen.

F 34

### Beispiel F 34: Lösung der Differentialgleichung $f''(x) + 4f(x) = 0$

a) Es soll geprüft werden, ob die Funktion  $y = f(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$  ( $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ) eine **Lösung der Differentialgleichung**  $f''(x) + 4f(x) = 0$  ist. Wir verfahren wie in Beispiel F 32:

$$(1) \quad f''(x) = (c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)'' = (-2c_1 \sin 2x + 2c_2 \cos 2x)' = -4c_1 \cos 2x - 4c_2 \sin 2x$$

$$f''(x) + 4f(x) = -4c_1 \cos 2x - 4c_2 \sin 2x + 4c_1 \cos 2x + 4c_2 \sin 2x = 0 \sin 2x + 0 \cos 2x = 0$$

(2) Die Gleichung ist wahr für alle  $x \in \mathbb{R}$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

(3) Alle Funktionen

$y = f(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ ,  
sind Lösungen von  $f''(x) + 4f(x) = 0$ .

Die durch  $y = f(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ ,  
 $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ , charakterisierte Lösungsschar  
enthält z.B. die Funktionen

$f_1(x) = \cos 2x$  ( $c_1 = 1, c_2 = 0$ ) und

$f_2(x) = \sin 2x$  ( $c_1 = 0, c_2 = 1$ ) als

Lösungen (vgl. Fig. F 55).

b) Es ist eine Lösung der Differentialgleichung  
zu finden, für die gilt:

$$y_0 = f(0) = 2 \text{ und } y'_0 = f'(0) = 1.$$

Aus den **Anfangsbedingungen** ergibt sich folgendes Gleichungssystem für  $c_1$  und  $c_2$ :

$$(I) \quad 2 = f(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = c_1, \text{ also } c_1 = 2$$

$$(II) \quad 1 = f'(0) = -2c_1 \sin 0 + 2c_2 \cos 0 = 2c_2, \text{ also } c_2 = 0,5$$

Die Funktion  $y = f(x) = 2 \cos 2x + 0,5 \sin 2x$  löst die Differentialgleichung  $f''(x) + 4f(x) = 0$   
und erfüllt die Anfangsbedingungen  $f(0) = 2$  und  $f'(0) = 1$  (vgl. Fig. F 55).

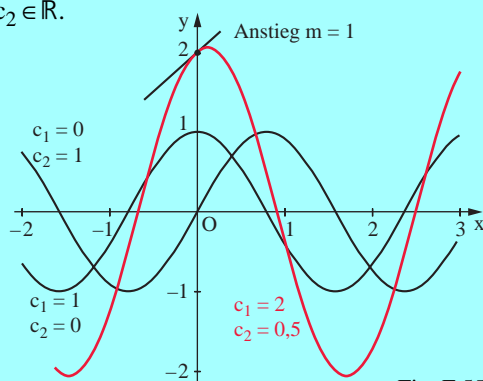


Fig. F 55

Die Beispiele F 32, F 33 und F 34 zeigen exemplarisch die Lösungssituationen bei Differentialgleichungen. Es gibt Lösungsfunktionen

- *ohne* frei veränderlichem Parameter (z.B. die Funktionen  $y = f(x) = e^{2x}$  oder  $y = f(x) = 2 \cos 2x + 0,5 \sin 2x$ ),
- *mit einem oder mehreren* frei veränderlichen Parametern wie z.B.  $y = f(x) = c e^{2x}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  bel., und  $y = f(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ ,  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  bel., die jeweils eine Lösungsschar mit unendlich vielen Lösungen repräsentieren.

Lösungen ohne frei veränderlichen Parameter nennt man **partikuläre Lösungen**.

Schöpft eine Lösungsschar die Menge aller Lösungen einer Differentialgleichung aus, so heißt diese Lösungsschar die **allgemeine Lösung der Differentialgleichung**. Die allgemeine Lösung ist von besonderem Interesse, da mit ihrer Hilfe alle im Zusammenhang mit der Differentialgleichung stehenden Anfangswertprobleme gelöst werden können.

Ein wichtiges Hilfsmittel beim Aufbau der allgemeinen Lösung einer *linearen* Differentialgleichung aus bekannten partikulären Lösungen stellen folgende Aussagen dar:

- Ist die Funktion  $y = f(x)$  eine Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung, dann ist auch die Funktion  $c \cdot f(x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  eine Lösung der angegebenen Differentialgleichung.
- Sind die Funktionen  $y = f_1(x)$  und  $y = f_2(x)$  Lösungen einer homogenen linearen Differentialgleichung, so ist auch die Funktion  $y = f_k(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  eine Lösung dieser Differentialgleichung.

Die zweite Aussage soll für homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung

$f''(x) + Q \cdot f'(x) + R \cdot f(x) = 0$  bewiesen werden:

$$f_1(x) \text{ ist Lösung, also gilt für alle } x \in V: \quad f_1''(x) + Q \cdot f_1'(x) + R \cdot f_1(x) = 0;$$

$$f_2(x) \text{ ist Lösung, also gilt für alle } x \in V: \quad f_2''(x) + Q \cdot f_2'(x) + R \cdot f_2(x) = 0.$$

Dann gilt auch für ein bel.  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$$c_1 \cdot f_1''(x) + c_1 \cdot Q \cdot f_1'(x) + c_1 \cdot R \cdot f_1(x) = 0 \quad \text{bzw.} \quad c_2 f_2''(x) + c_2 Q \cdot f_2'(x) + c_2 R \cdot f_2(x) = 0.$$

Als Summe dieser beiden Gleichungen erhält man

$$c_1 f_1''(x) + c_2 f_2''(x) + Q \cdot [c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x)] + R \cdot [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = 0 \quad \text{oder} \\ [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]'' + Q \cdot [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)]' + R \cdot [c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)] = 0.$$

Mit  $f_k(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$  ergibt sich:  $f_k''(x) + Q \cdot f_k'(x) + R \cdot f_k(x) = 0$  für alle  $x \in V$ .

Die so erhaltene Gleichung drückt aus, dass  $f_k(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$  Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) + Q \cdot f'(x) + R \cdot f(x) = 0$  ist. w.z.b.w.

Berücksichtigt man, dass die allgemeine Lösung einer Differentialgleichungen 1. Ordnung einen und die allgemeine Lösung einer Differentialgleichungen 2. Ordnung zwei Parameter enthält, so lässt sich feststellen:

- Ist  $y = f(x)$  eine *partikuläre Lösung* einer linearen homogenen Differentialgleichung 1. Ordnung, dann ist  $y = c \cdot f(x)$  mit  $c \in \mathbb{R}$  die *allgemeine Lösung* dieser Differentialgleichung.
- Sind  $y = f_1(x)$  und  $y = f_2(x)$  *partikuläre Lösungen* einer linearen homogenen Differentialgleichung 2. Ordnung, die sich nicht nur durch einen Zahlenfaktor unterscheiden, dann ist  $y = f(x) = c_1 \cdot f_1(x) + c_2 \cdot f_2(x)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

## F 5.4 Geometrische Veranschaulichung von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung mit der Gleichung  $f'(x) = G(x; f(x))$  (s. S. 214) lassen sich grafisch veranschaulichen. Statt des Funktionsterms  $f(x)$  kann (für jedes  $x \in V$ ) auch der Wert  $y$  der Funktion  $y = f(x)$  eingesetzt werden. Man erhält so die Gleichung  $f'(x) = G(x; y)$ .

Sie gibt für jeden Punkt  $P(x; y)$  im kartesischen Koordinatensystem (für den sich  $G(x; y)$  berechnen lässt) an, wie groß der Anstieg einer Lösungsfunktion  $y = f(x)$  der Differentialgleichung  $f'(x) = G(x; f(x))$  wäre, wenn eine Lösung durch diesen Punkt verlief. Zeichnet man eine kurze Strecke so in das Koordinatensystem ein, dass der Mittelpunkt der Strecke in  $P$  liegt, und wählt den Anstieg der Strecke gleich  $G(x; y)$ , so erhält man ein **Richtungsfeld** der Differentialgleichung. In Fig. F 56 wird das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$  (vgl. Beispiel F 30d)) dargestellt.

Der Anstieg im Punkt  $P(1; 1)$  beträgt  $m = -\frac{1}{1} = -1$ . Die Anstiege in den anderen Punkten werden analog ermittelt. Für Punkte mit der Ordinate  $y = 0$  lassen sich bei der gewählten Differentialgleichung keine Anstiege berechnen.

Die Lösung eines Anfangswertproblems  $f'(x) = G(x; f(x))$  mit  $y_0 = f(x_0)$  kann man sich geometrisch so vorstellen, dass man beginnend in  $P_0(x_0; y_0)$  eine Strecke mit einem durch das Richtungsfeld bestimmten Anstieg einzeichnet und zu  $P_1$  gelangt, von dort aus wieder dem Richtungsfeld folgt und so weiter. Dabei kann man bei jedem Punkt  $P$

beginnen, für den sich nach  $f'(x) = G(x; y)$  eindeutig eine Richtung berechnen lässt. Das Vorgehen wird als *EULER-CAUCHYsches Polygonzugverfahren* bezeichnet. Es ist in Fig. F 56 ausgehend vom Startpunkt  $P_0(0; 3)$  grafisch veranschaulicht. Das Ergebnis wird umso genauer, je kürzer die verwendeten Strecken sind. In Fig. F 56 ist zudem die exakte Lösung der Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung  $f(0) = 2$  dargestellt. Sie lautet:

$$y = f(x) = \sqrt{4 - x^2} \quad \text{mit } -2 < x < 2.$$

Fig. F 57 gibt das Richtungsfeld der Differentialgleichung  $f'(x) = r(1 - \frac{f(x)}{G})f(x)$  (vgl. Beispiel F 30c) für  $r = 0,5$  und  $G = 100$  wieder. Für  $f(x) = 100$  erhält man  $f'(x) = 0$ . Dem Wert 100 kann sich also eine Lösungsfunktion  $y = f(x)$  von oben oder unten nähern, kann ihn aber bei infinitesimal kleinen Änderungen von  $x$  nicht überschreiten. In Fig. F 57 sind mehrere partikuläre Lösungen der Differentialgleichung eingezeichnet. Sie folgen alle dem Richtungsfeld.

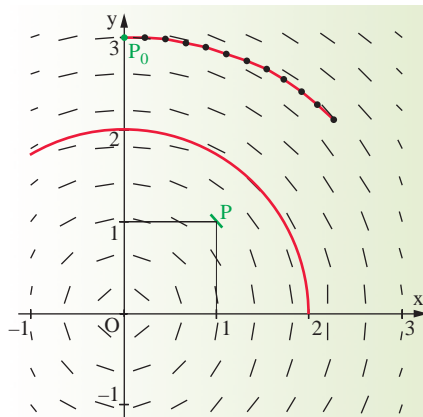


Fig. F 56

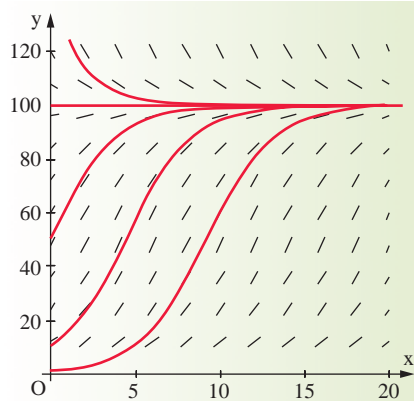


Fig. F 57

### F 5.5 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung

Ein allgemeines exaktes Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung gibt es nicht, aber man kann spezielle Lösungsverfahren für spezielle Typen von Differentialgleichungen angeben.

- *Lösen durch direktes Integrieren*

F 35

Beispiel F 35:

Manche einfache Differentialgleichungen wie z.B.  $f'(x) = 3x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$  (vgl. Beispiel F 30a), lassen sich sofort **durch Integration lösen**:

Aus  $\int f'(x)dx = \int 3x^2 dx$  erhält man  $f(x) + c_1 = x^3 + c_2$  bzw. nach Zusammenfassen der Integrationskonstanten  $f(x) = x^3 + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  bel.

Die Differentialgleichung  $f'(x) = 3x^2$  besitzt also als allgemeinen Lösung die Funktionenschar  $f(x) = x^3 + c$ .

Die in Beispiel F 35 verwendete Methode des direkten Integrierens lässt sich zum Lösen von Differentialgleichungen 1. Ordnung der Form  $f'(x) = g(x)$  einsetzen, wobei  $g$  eine gegebene und  $f$  die gesuchte Funktion darstellt. Im Beispiel F 30 ist keine weitere Differentialgleichung 1. Ordnung enthalten, die durch direktes Integrieren sofort lösbar wäre. Es gibt aber Typen von Differentialgleichungen 1. Ordnung, die durch *geschickte Umformungen* unter Verwendung von Regeln der Differentialrechnung in eine direkt integrierbar Form gebracht werden können. Das soll hier für *Differentialgleichungen mit trennbaren Variablen* und für *lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten* demonstriert werden. Diese Typen von Differentialgleichungen treten in praktischen Anwendungen besonders häufig auf.

- *Lösen durch Trennen der Variablen*

Explizite Differentialgleichungen 1. Ordnung, die sich in der Form  $f'(x) = \frac{g(x)}{h(f(x))}$  bzw.  $f'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$  schreiben lassen, werden als Differentialgleichung mit trennbaren Variablen bezeichnet. Dieser Gleichungstyp ist dadurch charakterisiert, dass sich eine der Seiten ihrer Gleichung (hier die rechte) als *Quotient zweier Funktionen* schreiben lässt, wobei die Zählerfunktion nur die unabhängige Variable und die Nennerfunktion nur die abhängige Variable enthält – oder umgekehrt. Bei der Differentialgleichung  $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$  (vgl. Beispiel F 30d)) gilt so  $g(x) = (-x)$  und  $h(y) = y$ . Auch die Beispiele F 30 b) und e) zählen zu diesem Typ von Differentialgleichungen. Die für solche Differentialgleichungen genutzte Lösungsmethode, die man als das *Trennen der Variablen*<sup>1)</sup> bezeichnet, ist durch folgendes prinzipielle Vorgehen gekennzeichnet:

Gesucht ist eine Funktion  $y = f(x)$ , die der Gleichung  $f'(x) = \frac{g(x)}{h(y)}$  genügt.

*Lösung:*

(1) Trennen der Variablen:

$f'(x) = \frac{dy}{dx}$  wird als ein Bruch mit dem Zähler  $dy$  und dem Nenner  $dx$  verstanden<sup>2)</sup> und die Gleichung

$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$  in  $h(y) dy = g(x) dx$  umgeformt. Man fasst also alle Terme der Differentialgleichung, die die Variable  $x$  enthalten, auf der einen und alle die Variable  $y$  enthaltenden Terme auf der anderen Seite der Gleichung zusammen.

(2) Integrieren:

Man erhält  $\int h(y) dy = \int g(x) dx$  und somit  $H(y) = G(x) + c$ .  $H$  ist eine Stammfunktion von  $h$  und  $G$  eine Stammfunktion von  $g$ . Die Integrationskonstanten wurden auf der rechten Seite zusammengefasst.

(3) Umstellen der erhaltenen Gleichung nach  $y = f(x)$

<sup>1)</sup> Dieses Verfahren wurde erstmals 1694 von Johann BERNOULLI veröffentlicht.

<sup>2)</sup> Die Berechtigung dieses Schritts bedürfte einer genaueren Rechtfertigung, worauf hier aber verzichtet werden soll.



F 36

Beispiel F 36:

Zu lösen ist die Differentialgleichung  $f'(x) - r f(x) = 0$ ,  $r \in \mathbb{R}$  (vgl. Beispiel F 30b)).Wir schreiben die Gleichung in der Form  $\frac{dy}{dx} = ry$ . Eine triviale Lösung dieser Gleichung stellt die konstante Funktion  $y = f(x) = 0$  dar. Von größerem Interesse ist jedoch der Fall  $y = f(x) \neq 0$ , der nun bearbeitet wird:(1) Trennen der Variablen: Aus  $\frac{dy}{dx} = ry$  ergibt sich  $\frac{dy}{y} = r dx$ (2) Integrieren:  $\int \frac{dy}{y} = \int r dx \Rightarrow \ln|y| = rx + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ (3) Umstellen nach  $y$ :  $e^{\ln|y|} = |y| = e^{rx+c} = e^c \cdot e^{rx} = d \cdot e^{rx}$  mit  $e^c = d$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ Fallunterscheidung: 1. Fall:  $y > 0$   $|y| = y = d e^{rx}$ , also  $y = f_1(x) = d e^{rx}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ 2. Fall:  $y < 0$   $|y| = -y = d e^{rx}$ , also  $y = f_2(x) = -d e^{rx}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ Die beiden Fälle werden durch  $k = \pm d$  zu einer einheitlichen Lösung zusammengefasst.Bezieht man noch die triviale Lösung ein, für die  $k = 0$  gilt, so ergibt sich als allgemeine Lösung die Funktionenschar  $y = f(x) = k e^{rx}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , mit  $k$  als Scharparameter.Ist  $r = 1$ , so lautet die Differentialgleichung  $f'(x) - f(x) = 0$  bzw.  $f'(x) = f(x)$ . Sie besitzt die Lösung  $y = f(x) = k e^x$ . Deshalb bezeichnet man  $f'(x) = f(x)$  als die *Differentialgleichung der Exponentialfunktion*.

- *Lösen von linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten*

Eine lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form  $f'(x) + q f(x) = s$  mit  $q, s \in \mathbb{R}$  (vgl. Definition F 3).Ist  $q = 0$ , so erhält man durch direktes Integrieren die Lösung  $f(x) = sx + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .Ist dagegen  $q \neq 0$ , so formt man die Differentialgleichung um zu  $f'(x) = s - q f(x) = 1 \cdot (s - q f(x))$ .Hierbei handelt es sich um eine *Differentialgleichung mit trennbaren Variablen*, wobei  $g(x) = 1$  und $h(f(x)) = \frac{1}{s - q f(x)}$  ist. Zur weiteren Bearbeitung schreiben wir die Gleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (s - qy).$$

Die konstante Funktion  $y = \frac{s}{q}$  erfüllt die Differentialgleichung; sie stellt eine triviale Lösung dar.Interessanter ist dagegen der Fall  $y \neq \frac{s}{q}$ , der nun untersucht wird.(1) Trennen der Variablen:  $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (s - qy) \Rightarrow \frac{dy}{s - qy} = 1 \cdot dx$ (2) Integrieren:  $\int \frac{dy}{s - qy} = \int dx$  und damit  $-\frac{1}{q} \ln|s - qy| = x + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ (3) Umstellen nach  $y$ : Aus  $-\frac{1}{q} \ln|s - qy| = x + c$  bzw.  $\ln|s - qy| = -qx - qc$  erhält man durch Potenzieren zur Basis  $e$ :

$$e^{\ln|s - qy|} = |s - qy| = e^{-qx - qc} = d e^{-qx} \text{ mit } e^{-qc} = d > 0, d \in \mathbb{R}$$

Fallunterscheidung:

1. Fall:  $s - qy > 0$   $|s - qy| = s - qy = d e^{-qx}$ , also:  $y = f_1(x) = \frac{s}{q} - \frac{d}{q} e^{-qx}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ 2. Fall:  $s - qy < 0$   $|s - qy| = -s + qy = d e^{-qx}$ , also:  $y = f_2(x) = \frac{s}{q} + \frac{d}{q} e^{-qx}$ ,  $d \in \mathbb{R}$ ,  $d > 0$ Die beiden Fälle werden durch  $k = \pm \frac{d}{q}$ ,  $d > 0$ , zu einer einheitlichen Lösung zusammengefasst:Bezieht man noch die triviale Lösung  $y = \frac{s}{q}$  ein, für die  $k = 0$  gilt, so erhält man als allgemeine Lösung die Funktionenschar  $y = f(x) = \frac{s}{q} + k e^{-qx}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , mit  $k$  als Scharparameter.



**Satz F 8: Lösung einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Die Differentialgleichung  $f'(x) + qf(x) = s$  mit  $x, q, s \in \mathbb{R}$  besitzt die allgemeine Lösung

$$y = f(x) = \begin{cases} k + sx, & \text{wenn } q = 0 \\ k \cdot e^{-qx} + \frac{s}{q}, & \text{wenn } q \neq 0 \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

$k \in \mathbb{R}$  ist der Scharparameter und kann durch eine Anfangsbedingung bestimmt werden.

F 8

**Beispiel F 37:**

Zu lösen ist die Differentialgleichung  $f'(x) + f(x) = 2$  mit  $x \in \mathbb{R}$  (vgl. Beispiel F 30 e)) unter Beachtung der Anfangsbedingung  $y_0 = f(0) = 0$ .

**a) Allgemeine Lösung**

Die lineare Differentialgleichung hat die Koeffizienten  $q = 1$  und  $s = 2$ . Da  $q \neq 0$ , lautet nach Satz F 8 die allgemeine Lösung

$$y = f(x) = \frac{2}{1} + k e^{-x} = 2 + k e^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

**b) Partikuläre Lösung**

Aus dem Ansatz  $y_0 = f(0) = 2 + k e^0 = 2 + k = 0$  ergibt sich für den Scharparameter  $k = -2$ . Die der

gegebenen Anfangsbedingung genügende partikuläre Lösung ist also  $y = f(x) = 2 - 2e^{-x}$ .

Fig. F 58 zeigt das Richtungsfeld der Differentialgleichung sowie mehrerer Lösungsfunktionen. Die ermittelte partikuläre Lösung ist rot hervorgehoben. Mit wachsendem  $x$  nähern sich alle Lösungsfunktionen asymptotisch der konstanten Funktion  $y = \frac{s}{q} = 2$ .

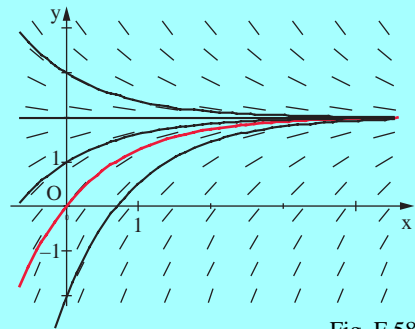


Fig. F 58

F 37

**F 5.6 Näherungsverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen 1. Ordnung**

Viele Differentialgleichungen – auch solche 1. Ordnung – lassen sich nicht oder nur aufwändig lösen. Deshalb ist es wichtig, neben exakten auch über *numerische Lösungsverfahren* zu verfügen, die *Näherungslösungen* für Anfangswertprobleme liefern. Da man numerische Lösungsverfahren mit Personalcomputern abarbeiten kann, werden Differentialgleichungen so für einen immer breiteren Interessentenkreis zugänglich.

Die Grundidee der meisten numerischen Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung besteht im Polygonzugverfahren (vgl. Abschnitt F 5.4).

In einer *Differentialgleichung* 1. Ordnung in expliziter Form  $f'(x) = G(x; f(x))$  kann man den

Differentialquotienten  $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  bei hinreichend klein festgelegtem  $h$  näherungsweise durch den Differenzenquotienten  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  ersetzen. Unter dieser Voraussetzung gilt für

$f'(x) = G(x; f(x))$  dann  $G(x; f(x)) = f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  bzw.  $h \cdot G(x; f(x)) \approx f(x+h) - f(x)$ . Damit folgt auch  $f(x+h) \approx f(x) + h \cdot G(x; f(x))$ . Setzt man statt des „ungefähr gleich“ ein „ist gleich“, so

ergibt sich eine Gleichung für eine neue Funktion  $\bar{f}$ , die eine *Näherung* für  $f$  ist. Es gilt:

$$\bar{f}(x+h) = \bar{f}(x) + h \cdot G(x; \bar{f}(x)) \quad (*)$$

Die Näherung  $\bar{f}$  stimmt umso genauer mit der gesuchten Funktion  $f$  überein, je kleiner  $h$  gewählt wird. Nach (\*) lässt sich nun aus  $\bar{f}(x+h)$  weiter  $\bar{f}(x+2h) = \bar{f}(x+h) + h \cdot G(x+h; \bar{f}(x+h))$  berechnen. Auf diesem Wege erhält man ausgehend von der Anfangsbedingung  $y_0 = f(x_0) = \bar{f}(x_0)$ , eine Folge von Näherungswerten  $y_i = \bar{f}(x_i)$  für die gesuchte Funktion, die jeweils an den Stellen  $x_1 = x_0 + h$ ,  $x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h$ , ...,  $x_i = x_0 + ih$  berechnet werden. Mit den hier verwendeten Bezeichnungen stellt Gleichung (\*) eine **rekursive Bildungsvorschrift** der Folge  $(y_i)$  dar:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot G(x_0 + ih; y_i), i \in \mathbb{N}, i \geq 0, h \neq 0$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen:

- Ist eine Differentialgleichung der Form  $f'(x) = G(x; y)$  mit der Anfangsbedingung  $y_0 = f(x_0)$  zu lösen, so liefern die Bildungsvorschriften  $x_i = x_0 + ih$  und  $y_{i+1} = y_i + h \cdot G(x_i; y_i)$ ,  $i \in \mathbb{N}, i \geq 0$ ,  $h \neq 0$ , eine Folge von Punkten  $P_i(x_i; y_i)$ , die eine Näherungslösung für die gesuchte Funktion  $y = f(x)$  darstellen.
- Je mehr sich  $h$  dem Wert null annähert, desto näher liegen die Punkte  $P_i$  am Graphen der Funktion  $f$  und desto höher ist der Rechenaufwand.

F 38

Beispiel F 38:

Die Differentialgleichung  $f'(x) = r \cdot (1 - \frac{f(x)}{G}) f(x)$  (vgl. Beispiel F 30c und Fig. F 57)) mit  $r = 0,5$  und  $G = 100$  und der Anfangsbedingung  $f(0) = 4$  soll im Intervall von  $x = 0$  bis  $x = 20$  mit einer Schrittweite von  $h = 2$  näherungsweise gelöst werden.

Aus  $G(x; y) = 0,5 \cdot (1 - \frac{y}{100}) y$  erhält man für die Funktionswerte  $y_i$  die rekursive Bildungsvorschrift  $y_{i+1} = y_i + h \cdot r \cdot (1 - \frac{y_i}{G}) y_i = y_i + (1 - \frac{y_i}{100}) y_i = 2y_i - \frac{y_i^2}{100}$  oder kurz  $y_{i+1} = 2y_i - 0,01y_i^2$ .

Die Folge der Argumente  $x_i$  besitzt die explizite Bildungsvorschrift  $x_i = x_0 + ih = 2i$ . Mit der Anfangsbedingung  $f(0) = 4$  ( $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 4$ ) ergibt sich die Wertetabelle und die grafische Darstellung der Näherungslösung (vgl. Fig. F 59,  $u1$  entspricht  $x$ ,  $u2$  entspricht  $y$ ).

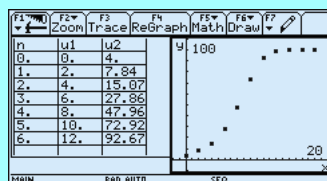


Fig. F 59

### F 5.7 Lösen linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Es sollen Lösungen für Differentialgleichungen 2. Ordnung der Form  $f''(x) + q f'(x) + r f(x) = 0$  mit  $q, r \in \mathbb{R}$  ermittelt werden.

Für  $q = 0$  und  $r = 1$  erhält man die einfache Gleichung  $f''(x) + f(x) = 0$  bzw.  $f''(x) = -f(x)$ . Prüft man die Liste der bekannten Funktionen auf die Eigenschaft  $f''(x) = -f(x)$ , so stößt man auf die beiden Winkelfunktionen  $y = f_1(x) = \sin x$  und  $y = f_2(x) = \cos x$ . Es gilt nämlich:  $f_1'(x) = \cos x$ ,  $f_1''(x) = (\cos x)' = -\sin x = -f_1(x)$ . Die Rechnung für  $f_2$  verläuft analog.  $f''(x) = -f(x)$  hat deshalb  $f_1$  und  $f_2$  als partikuläre Lösungen. Nach den Erkenntnissen aus Abschnitt F 5.3 lautet die allgemeine Lösung  $f(x) = c_1 \sin x + c_2 \cos x$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  – man erhält also eine periodische Funktion.

Wird die Differentialgleichung auf den Fall  $f''(x) + r f(x) = 0$  bzw.  $f''(x) = -r f(x)$  mit  $r > 0$  verallgemeinert, so muss man auch die partikulären Lösungen verändern. Die Funktion  $f_1(x) = k \sin x$  mit dem zusätzlichen Faktor  $k$  ist *keine* partikuläre Lösung der Gleichung, wie man durch Einsetzen prü-

fen kann. Setzt man dagegen einen Faktor  $\omega$  in das Argument der Funktion, so ergibt sich eine partikuläre Lösung:

$f_1(x) = \sin \omega x$ ,  $f_1'(x) = \omega \cos \omega x$ ,  $f_1''(x) = (\omega \cos \omega x)' = -\omega^2 \sin \omega x = -\omega^2 \cdot f_1(x) = -r f_1(x)$  mit  $r = \omega^2$  bzw.  $\omega = \sqrt{r}$ ,  $r > 0$ . Eine zweite partikuläre Lösung ist  $f_2(x) = \cos \omega x$ .

Damit lautet die allgemeine Lösung:  $f(x) = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Setzt man für  $x$  die Zeit  $t$  ein, so beschreibt die Funktion  $f(t) = c_1 \sin \omega t + c_2 \cos \omega t$  eine oszillierende Größe, wie sie bei ungedämpften harmonischen Schwingungen auftritt. Die Differentialgleichung  $f''(x) + r f(x) = 0$  mit  $r > 0$  wird deshalb auch als *Schwingungsgleichung* bezeichnet.

Für  $q = 0$  und  $r = -1$  erhält man aus  $f''(x) + q f'(x) + r f(x) = 0$  die Gleichung  $f''(x) - f(x) = 0$  bzw.

$f''(x) = f(x)$ . Eine solche **Eigenschaft besitzt die Exponentialfunktion  $f(x) = e^x$** , denn es gilt  $(e^x)' = e^x = f(x)$ .  $f_1(x) = e^x$  ist folglich eine partikuläre Lösung der Gleichung  $f''(x) = f(x)$ . Wie aus Abschnitt F 5.3 bekannt ist, benötigt man für die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 2. Ordnung jedoch noch eine zweite partikuläre Lösung. Dafür kann  $f_2(x) = e^{-x}$  gewählt werden, denn  $(e^{-x})' = -e^{-x} = -f_2(x)$ . Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) = f(x)$  lautet daher  $f(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ .

Gilt nicht  $r = -1$ , sondern allgemeiner  $r < 0$ , so hat die allgemeine Lösung der Gleichung  $f''(x) = r f(x)$  die Form  $f(x) = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}$  mit  $k = \sqrt{-r}$ .

Auch wenn die Beschränkung  $q = 0$  aufgehoben wird, kann man die Differentialgleichung  $f''(x) + q f'(x) + r f(x) = 0$  mit  $q, r \in \mathbb{R}$  wie oben durch einen *Ansatz mit einer geeigneten Funktion* lösen. Das Vorgehen soll anhand der Exponentialfunktionen  $f(x) = e^{kx}$  als Lösungsansatz demonstriert werden.

Setzt man  $f(x) = e^{kx}$ ,  $f'(x) = k e^{kx}$  und  $f''(x) = k^2 e^{kx}$  in die obige Differentialgleichung ein, so ergibt sich die Gleichung  $k^2 e^{kx} + q k e^{kx} + r e^{kx} = 0$ , woraus man bei Division durch  $e^{kx}$  ( $\neq 0$  für alle  $x$ ) die sogenannte *charakteristische Gleichung*  $k^2 + q k + r = 0$  erhält. Diese quadratische Gleichung besitzt

die Lösungen  $k_{1/2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}$ .

Nun müssen drei Fälle unterschieden werden:

1. Fall:  $\frac{q^2}{4} - r > 0$

Es existieren zwei  $k$ -Werte, aus denen sich *zwei partikuläre Lösungen* der Differentialgleichung ergeben:

$$f_1(x) = e^{k_1 x} = e^{\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}\right] \cdot x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = e^{k_2 x} = e^{\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}\right] \cdot x}.$$

Die *allgemeine Lösung* lautet daher  $f(x) = c_1 \cdot e^{k_1 x} + c_2 \cdot e^{k_2 x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  bel.

2. Fall:  $\frac{q^2}{4} - r = 0$

Hier gilt  $r = \frac{q^2}{4}$  sowie  $k_1 = k_2 = k = -\frac{q}{2}$ . Die erste *partikuläre Lösung* ist deshalb  $f_1(x) = e^{-\frac{q}{2} x}$ .

Durch Einsetzen lässt sich zeigen, dass  $f_2(x) = x \cdot e^{-\frac{q}{2} x}$  mit  $r = \frac{q^2}{4}$  ebenfalls eine partikuläre Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) + q f'(x) + r f(x) = 0$  ist. Aus beiden partikulären

Lösungen folgt die allgemeine Lösung  $f(x) = c_1 \cdot e^{-\frac{q}{2} x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{q}{2} x}$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  bel.

3. Fall:  $\frac{q^2}{4} - r < 0$

Die charakteristische Gleichung besitzt in diesem Falle keine *reellen* Lösungen. Durch Betrachtungen im Bereich der *komplexen Zahlen*, die hier nicht geführt werden können, lassen sich dennoch folgende partikuläre Lösungen finden:

$$f_1(x) = e^{-\frac{q}{2}x} \cos \omega x \quad \text{und} \quad f_2(x) = e^{-\frac{q}{2}x} \sin \omega x \quad \text{mit } \omega = \sqrt{r - \frac{q^2}{4}}.$$

Aus den beiden oben genannten partikulären Lösungen ergibt sich die allgemeine Lösung

$$f(x) = c_1 e^{-\frac{q}{2}x} \cos \omega x + c_2 e^{-\frac{q}{2}x} \sin \omega x = e^{-\frac{q}{2}x} (c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x) \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \omega = \sqrt{r - \frac{q^2}{4}}.$$

Zusammengefasst ergibt sich:

F 9

**Satz F 9: Lösung der homogenen linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten**

Jede Differentialgleichung der Form  $f''(x) + qf'(x) + rf(x) = 0$  mit  $x, q, r \in \mathbb{R}$  ist lösbar. Ihre allgemeine Lösung lautet:

$$f(x) = \begin{cases} c_1 \cdot e^{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}\right)x} + c_2 \cdot e^{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - r}\right)x} & \text{für } r < \frac{q^2}{4} \\ c_1 \cdot e^{-\frac{q}{2}x} + c_2 \cdot x \cdot e^{-\frac{q}{2}x} & \text{für } r = \frac{q^2}{4}, \\ c_1 \cdot e^{-\frac{q}{2}x} \cos \omega x + c_2 \cdot e^{-\frac{q}{2}x} \sin \omega x & \text{für } r > \frac{q^2}{4}, \quad \omega = \sqrt{r - \frac{q^2}{4}} \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ bel.}$$

F 39

**Beispiel F 39: Lösen linearer homogener Differentialgleichungen 2. Ordnung** (nach Satz F 9)

a) Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) - 4f(x) = 0$  ( $q = 0; r = -4$ )

Ansatz:  $y = f(x) = e^{kx}$

Einsetzen:  $k^2 e^{kx} - 4e^{kx} = 0$

char. Gleichung:  $k^2 - 4 = 0$  mit den  
Lösungen  $k_1 = 2; k_2 = -2$

allg. Lösung:  $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$   
mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

partikuläre Lösung für

$f(0) = 5, f'(0) = -6$ :  $y = e^{2x} + 4e^{-2x}$   
(Fig. F 60)

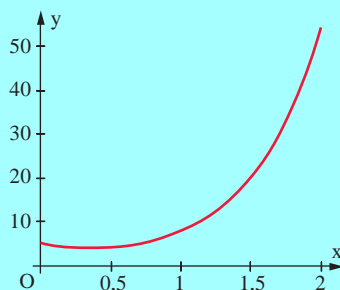


Fig. F 60

b) Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$  ( $q = 2; r = 1$ )

Ansatz:  $y = f(x) = e^{kx}$

Einsetzen:  $k^2 e^{kx} + 2k e^{kx} + e^{kx} = 0$

char. Gleichung:  $k^2 + 2k + 1 = 0$  mit der  
Lösung:  $k_1 = k_2 = k = -1$

allg. Lösung:  $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$   
mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

partikuläre Lösung für

$f(1) = 5, f'(1) = 1$ :  $y = -e \cdot e^{-x} + 6e \cdot x e^{-x}$   
(Fig. F 61)

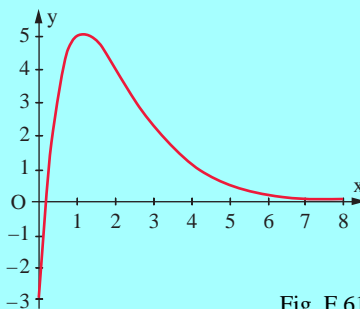


Fig. F 61

c) Lösung der Differentialgleichung  $f''(x) + 4f(x) = 0$  (Beispiele F 30f), F 34a)) ( $q = 0; r = 4$ )

Ansatz:  $y = f(x) = e^{kx}$

Einsetzen:	$k^2 e^{kx} + 4e^{kx} = 0$
char. Gleichung:	$k^2 + 4 = 0$ ; im Bereich der reellen Zahlen nicht lösbar
	$q = 0 \Rightarrow e^{-\frac{q}{2}x} = 1$ ; $r = 4 \Rightarrow \omega = \sqrt{4} = 2$
allgemeine Lösung:	$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## F 5.8 Anwendungen von Differentialgleichungen

### • Unbeschränktes und logistisches Wachstum von Populationen

Eine Population bestehe aus  $N$  Individuen. Nach einer bestimmten Zeit  $\Delta t$  ist eine Änderung  $\Delta N$  mit  $\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t)$  des Populationsumfangs  $N$  zu verzeichnen. Kann die Population ohne Beschränkung wachsen, so ist die Änderung proportional zum Ausgangsumfang. Bei genauerer Betrachtung ergibt sich:

je mehr Individuen sind, desto mehr Nachkommen	$\Delta_1 N = g \cdot N$ ,	$g$ – Vermehrungsrate
je mehr Individuen sind, desto mehr Sterbefälle	$\Delta_2 N = s \cdot N$ ,	$s$ – Sterberate

$$\Delta N = \Delta_1 N - \Delta_2 N = (g - s) N = k \cdot N \quad \text{bzw. } \Delta N = k \cdot N$$

$k$  – Wachstumsrate der Population

Ist das Wachstum durch eine Obergrenze  $G$  der Individuenzahl beschränkt<sup>1)</sup>, so wird sich bei noch kleiner Individuenzahl ein annähernd unbeschränktes Wachstum einstellen, mit wachsender Zahl  $N$  wird die Wachstumsrate jedoch kleiner, um schließlich bei  $N = G$  den Wert 0 anzunehmen. Die modifizierte Wachstumsrate  $k_b = k \left(1 - \frac{N}{G}\right)$  weist das erwartete Verhalten auf. Es ergibt sich

$$\Delta N = k_b \cdot N = k \cdot \left(1 - \frac{N}{G}\right) \cdot N \quad (\text{logistisches Wachstum}^2).$$

Da sich in beiden Wachstumsfällen die Änderung  $\Delta N$  auf einen bestimmten Zeitraum, z. B.  $\Delta t = 1$  Jahr, bezieht, spielt die Art des Populationswachstums *innerhalb* dieses Zeitraums keine Rolle. Es könnte sich (wie bei Bakterien) um ein *kontinuierliches* Wachstum handeln. Möglich wäre aber auch, dass ein *diskontinuierliches*, an einen Lebenszyklus gebundenes Populationswachstum (wie bei Schmetterlingen) vorliegt. Im Falle des kontinuierlichen Wachstums kann man von den beiden angegebenen, jeweils  $\Delta N$  beschreibenden Gleichung zu einer Differentialgleichung übergehen.

	unbeschränktes Wachstum	logistisches Wachstum
Gleichung für $\Delta N$	$\Delta N = N(t + \Delta t) - N(t) = k \cdot N(t)$ $k$ ist abhängig von $\Delta t$ : Je kleiner $\Delta t$ , desto kleiner ist $k$ .	$\Delta N = k \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) \cdot N(t)$ $k$ ist abhängig von $\Delta t$ : Je kleiner $\Delta t$ , desto kleiner ist $k$ .
Gleichung durch $\Delta t$ ( $\Delta t \neq 0$ ) dividieren	$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta t} N(t)$	$\frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta t} \left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) \cdot N(t)$
Grenzübergang mit $\Delta t \rightarrow 0$	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) =$ $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta t} \cdot N(t)$	$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{N(t + \Delta t) - N(t)}{\Delta t} = N'(t) =$ $= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta t} \left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) \cdot N(t)$
Differentialgleichung	$N'(t) = r \cdot N(t)$ , $r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta t}$ Für kleines $\Delta t$ gilt $r \approx \frac{k}{\Delta t}$	$N'(t) = r \cdot \left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) \cdot N(t)$ , $r = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{k}{\Delta t}$ Für kleines $\Delta t$ gilt $r \approx \frac{k}{\Delta t}$

<sup>1)</sup> Eine Beschränkung kommt beispielsweise zustande, wenn die Population in einem isolierten Gebiet lebt, in dem sich höchstens  $G$  Individuen ernähren können.

<sup>2)</sup> Die Gleichung des logistischen Wachstums wurde erstmals von VERHULST und PEARL 1838 verwendet.

$N'(t) = rN(t)$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r > 0$  ist eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung. Sie entspricht bis auf die Bezeichnung der im Beispiel F 36 behandelten Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung kann von dort übertragen werden und lautet  $N(t) = ce^{r \cdot t}$ . Gilt die Anfangsbedingung  $N(0) = N_0$ , so erhält man  $N_0 = ce^0 = c$ . Die **Lösung des Anfangswertproblems** ist daher  $N(t) = N_0 e^{r \cdot t}$ . Die Differentialgleichung  $N'(t) = r \cdot (1 - \frac{N(t)}{G}) \cdot N(t)$  des logistischen Wachstums ist zwar auch von 1. Ordnung, aber nicht linear. Sie wird ebenfalls durch Trennen der Variablen gelöst. Beim Integrieren benötigt man die Methode der **Partialbruchzerlegung** (vgl. Abschnitt E 5.4).

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) N(t), \quad N(0) = N_0$$

**Trennen der Variablen:**  $\frac{dN}{\left(1 - \frac{N(t)}{G}\right) \cdot N(t)} = r \cdot dt$     Integrieren:  $\int \frac{1}{\left(1 - \frac{N}{G}\right) \cdot N} dN = \int r dt = rt + c$

Das Integral auf der linken Seite lässt sich mittels Partialbruchzerlegung bestimmen. Man erhält:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{N}{G}\right) \cdot N} = \frac{1}{G - N} + \frac{1}{N}, \quad \text{also} \quad \int \frac{1}{G - N} dN + \int \frac{1}{N} dN = -\ln(G - N) + \ln N = \ln \frac{N}{G - N} = rt + c$$

Daraus folgt:  $e^{\ln \frac{N}{G - N}} = \frac{N}{G - N} = e^{rt + c} = d \cdot e^{rt}$  bzw.  $N = (G - N) \cdot d \cdot e^{rt}$  mit  $d = e^c$ . Die letzte Gleichung wird nach  $N$  aufgelöst:  $N = Gd e^{rt} - Nd e^{rt}$ , also  $N + Nd e^{rt} = N(1 + d e^{rt}) = Gd e^{rt}$  und damit

$$N = \frac{G \cdot d \cdot e^{rt}}{1 + d \cdot e^{rt}}, \quad d \in \mathbb{R}, \quad d > 0.$$

Bestimmen des Parameters  $d$ :

$$N_0 = N(0) = \frac{G \cdot d}{1 + d} \Rightarrow d = \frac{N_0}{G - N_0} \Rightarrow N(t) = \frac{GN_0 e^{rt}}{G - N_0 + N_0 e^{rt}}$$

Für die Werte  $r = 0,5 \text{ a}^{-1}$ ,  $G = 100$  und  $N(0) = 4$  sind die partikulären Lösungen der beiden Differentialgleichungen des unbegrenzten ( $N_0 = 4$ ) und des logistischen Wachstums ( $N_0 = 4^{1)}$  und  $N_0 = 150$ ) in Fig. F 62 dargestellt.

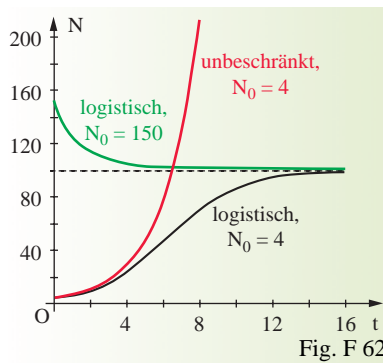


Fig. F 62

- *Steuerung des Füllstandes einer Talsperre*

Der Füllstand einer Talsperre wird ausgedrückt durch das (aktuelle) Stauvolumen  $V(t)$ , das sich durch den Zu- und Abfluss von Wasser mit der Zeit  $t$  ändern kann. Zu- und Abfluss von Wasser geben an, welches Wasservolumen *pro Zeiteinheit* in die Talsperre hinein- bzw. aus ihr herausfließt. Beide werden zusammengefasst zur Wasserzufuhr  $Z(t)$ , die sich ebenfalls mit der Zeit ändern kann. Überwiegt der Zufluss, so gilt  $Z(t) \geq 0$ , überwiegt dagegen der Abfluss, so ist  $Z(t) \leq 0$ .

Eine Wasserzufuhr  $Z(t) \neq 0$  bewirkt eine Änderung des Stauvolumens  $V(t)$ . Da die Änderung des Stauvolumens durch die erste Ableitung  $V'(t)$  beschrieben wird, gilt die Gleichung  $V'(t) = Z(t)$ . Dabei ist der Füllstand zur Zeit  $t = 0$  mit  $V(0) = V_0$  als Anfangsbedingung gegeben. Für  $t \geq 0$  beschreibt die Funktion  $Z(t)$  die Einstellung des Zu- und Abflusses der Talsperre zu einer beliebigen Zeit  $t$ .

Der Füllstand der Talsperre kann durch die Wasserzufuhr  $Z(t)$  *gesteuert* werden. Je nach der verfolgten Zielstellung muss eine geeignete Funktion  $Z(t)$  ausgewählt oder eine durch Umweltbedingungen diktierte Funktion  $Z(t)$  akzeptiert werden.

Wir wollen nun für einen speziellen Fall die Entwicklung des Füllstandes betrachten:

<sup>1)</sup> Die numerische Lösung dieses Anfangswertproblems ist in Beispiel F 38 dargestellt.

Der aktuelle Füllstand einer Talsperre liege mit dem Volumen  $V(0) = V_0$  noch deutlich unter dem maximalen Volumen  $V_{\max}$ . Die Zufuhr  $Z(t)$  soll so gewählt werden, dass das Stauvolumen  $V(t)$  ständig zunimmt,  $V_{\max}$  aber nicht überschreitet. Das wird erreicht, wenn die Wasserzufuhr  $Z(t)$  stets proportional zum momentan noch freien Stauraum  $V_{\max} - V(t)$  gehalten wird, wenn also gilt:

$$Z(t) = V'(t) = r(V_{\max} - V(t)) \text{ mit } V(0) = V_0 \quad 1)$$

Hierbei handelt es sich um eine **lineare Differentialgleichung 1. Ordnung**. Man kann diese auch in der Form  $V'(t) + r V(t) = r V_{\max}$  schreiben, was der Differentialgleichung  $f'(x) + q f(x) = s$  mit  $q = r$  und  $s = r V_{\max}$  (vgl. Abschnitt F 5.5) entspricht. Ihre allgemeine Lösung lautet  $f(x) = \frac{s}{q} + k e^{-qx}$ , hier also  $V(t) = V_{\max} + k e^{-rt}$ . Um den Parameter  $k$  zu bestimmen, muss die Anfangsbedingung eingesetzt werden:

$V(0) = V_0 = V_{\max} + k e^{-r \cdot 0} = V_{\max} + k \Rightarrow k = V_0 - V_{\max}$  bzw.  $k = -(V_{\max} - V_0)$ . Die Lösung des Anfangswertproblems lautet somit:  $V(t) = V_{\max} - (V_{\max} - V_0) e^{-rt}$  (Fig. F 63).

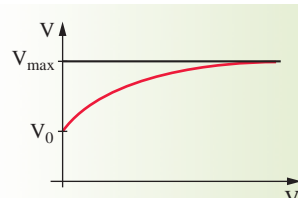


Fig. F 63

#### • Federschwingung

Ein Körper, der an einer Feder befestigt ist, führt nach einer Auslenkung eine Schwingung durch (Fig. F 64). Der Ort des Körpers wird durch die zeitabhängige Ortskoordinate  $y(t)$  beschrieben, deren Gleichung gefunden werden soll.

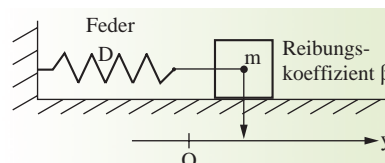


Fig. F 64

Auf den Körper wirken folgende Kräfte:

- die Trägheitskraft:  $ma = my''(t)$   $m$  – Masse,  $a$  – Beschl.
  - die geschwindigkeitsproportionale Reibungskraft:  $\beta v = \beta y'(t)$   $\beta$  – Reibungskoeffizient
  - die rücktreibende Federkraft (HOOKsches Gesetz):  $Dy(t)$   $D$  – Federkonstante
- $y$  – Auslenkung

Die Summe der betrachteten Kräfte ist gleich der von außen wirkenden Kraft, hier also 0. Es gilt demzufolge:

$$my''(t) + \beta y'(t) + Dy(t) = 0.$$

Dividiert man diese **Differentialgleichung 2. Ordnung** durch  $m$ , so ergibt sich

$$y''(t) + \frac{\beta}{m} y'(t) + \frac{D}{m} y(t) = 0 \quad (*).$$

Diese Gleichung entspricht mit den Zuordnungen  $q = \frac{\beta}{m}$  und  $r = \frac{D}{m}$  der Gleichung  $f''(x) + q f'(x) + r f(x) = 0$  (vgl. Abschnitt F 5.7).

Gleichung (\*) wird mit dem Lösungsansatz  $y(t) = e^{kt}$  gelöst. Es gilt  $y'(t) = k e^{kt}$  und  $y''(t) = k^2 e^{kt}$ .

Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (\*) erhält man

$$k^2 e^{kt} + \frac{\beta}{m} k e^{kt} + \frac{D}{m} e^{kt} = e^{kt} \left( k^2 + \frac{\beta}{m} k + \frac{D}{m} \right) = 0 \text{ und daraus nach Division durch } e^{kt} \text{ die charakteristische Gleichung } k^2 + \frac{\beta}{m} k + \frac{D}{m} = 0 \text{ mit den Lösungen } k_{1/2} = -\frac{\beta}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\beta}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m}}.$$

Ist der Reibungskoeffizient  $\beta$  zwar nicht vernachlässigbar, aber dennoch hinreichend klein, so überwiegt im Radikand der Wurzel der Anteil  $\frac{D}{m}$ , der Radikand wird negativ. Nach Abschnitt F 5.7

(3. Fall) ergibt sich wegen  $q = \frac{\beta}{m}$  (s. o.) als allgemeine Lösung  $y(t) = e^{-\frac{\beta}{2m}t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  und  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{\beta}{2m}\right)^2}$ . Da  $\frac{\beta}{2m}$  als Dämpfungskonstante  $\delta$  bezeichnet wird, heißt die Lösung

1) Man sieht: Für  $V(t) \ll V_{\max}$  ist  $Z(t)$  groß, für  $V(t) = V_{\max}$  gilt  $Z(t) = 0$ .



schließlich  $y(t) = e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)$  mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Diese Gleichung besagt, dass die Federanordnung in eine gedämpfte Schwingung gebracht werden kann.

Es soll nun eine Federanordnung mit  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $D = 1,04 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-2}$  und  $\beta = 0,4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  betrachtet werden. Hier gilt  $\frac{D}{m} = 1,04 \text{ s}^{-2} \gg (\frac{\beta}{2m})^2 = (0,2 \text{ s}^{-1})^2 = 0,04 \text{ s}^{-2}$ ;  $\delta = \frac{\beta}{2m} = 0,2 \text{ s}^{-1}$ ;

$\omega = \sqrt{1,04 \text{ s}^{-2} - 0,04 \text{ s}^{-2}} = 1 \text{ s}^{-1}$ . Die Schwingungsgleichung für diese Federanordnung lautet:

$$y(t) = e^{-0,2 \text{ s}^{-1} \cdot t} (c_1 \cos(1 \text{ s}^{-1} \cdot t) + c_2 \sin(1 \text{ s}^{-1} \cdot t))$$

Wird die Masse aus der Ruhelage heraus ( $y(0) = 0$ ) mit einer Geschwindigkeit von  $10 \text{ m s}^{-1}$  in die positive  $y$ -Richtung weggestoßen ( $y'(0) = 10 \text{ m s}^{-1}$ ), so lassen sich die Parameter  $c_1$  und  $c_2$  der allgemeinen Lösung bestimmen:

$y(0) = 0$  in die allgemeine Lösung einsetzen:

$$y(0) = 0 = e^{-\delta \cdot 0} (c_1 \cos \omega \cdot 0 + c_2 \sin \omega \cdot 0) = 1 \cdot (c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0) = c_1 = 0.$$

**Erste Ableitung der Lösung:**

$$y'(t) = [e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t)]' = -\delta e^{-\delta t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) + e^{-\delta t} (-c_1 \omega \sin \omega t + c_2 \omega \cos \omega t)$$

$$y'(0) = 10 \text{ m s}^{-1} = -\delta e^{-\delta \cdot 0} (c_1 \cos \omega \cdot 0 + c_2 \sin \omega \cdot 0) + e^{-\delta \cdot 0} (-c_1 \omega \sin \omega \cdot 0 + c_2 \omega \cos \omega \cdot 0) \\ = -\delta (c_1 + 0) + \omega (0 + c_2)$$

$$y'(0) = 10 \text{ m s}^{-1} = -\delta \cdot c_1 + \omega c_2.$$

Da  $c_1 = 0$  ist, gilt  $\omega c_2 = 10 \text{ m s}^{-1}$  bzw.

$$c_2 = \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{\omega} = \frac{10 \text{ m s}^{-1}}{1 \text{ s}^{-1}} = 10 \text{ m}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems lautet:

$$y(t) = 10 \text{ m} \cdot e^{-0,2 \text{ s}^{-1} \cdot t} \cdot \sin(1 \text{ s}^{-1} \cdot t) \quad (\text{vgl. Fig. F 65})$$

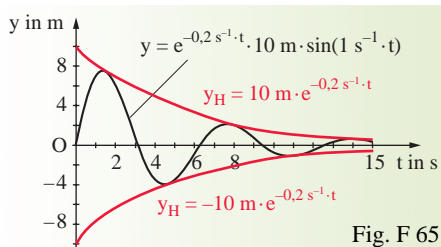


Fig. F 65

Nachdem einleitend eine gedämpfte Schwingung untersucht wurde, soll nun für die gleiche Federanordnung geklärt werden,

- welche Schwingung ausgeführt wird, wenn keine Reibung vorhanden wäre und
- wie groß der Reibungskoeffizient bzw. die Dämpfungskonstante sein müsste, damit die Anordnung überhaupt nicht schwingen kann.

Im ersten Fall gilt  $\beta = 0$  und damit auch  $\delta = 0$ . Aus diesen Werten errechnet sich die Kreisfrequenz

$\omega = 1,020 \text{ s}^{-1}$  und damit ergibt sich für die allgemeine Lösung der Schwingungsgleichung

$$y(t) = e^{-0 \cdot t} (c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t) = c_1 \cos 1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t + c_2 \sin 1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t. \text{ Unter den bereits betrachteten Anfangsbedingungen ergibt sich die ungedämpfte Schwingung } y(t) = 9,806 \text{ m} \cdot \sin 1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t$$

(vgl. Graph 1 in Fig. F 66). Die Frequenz der Schwingung ist hier etwas höher als bei der gedämpften Schwingung (vgl. Fig. F 65 und Graph 2 in Fig. F 66).

Die Federanordnung kann nicht mehr schwingen, wenn die Reibung und damit der Wert für  $\beta$  mindestens so gross geworden ist, dass die charakteristische Gleichung  $k^2 + \frac{\beta}{m} k + \frac{D}{m} = 0$  eine reelle

Doppellösung besitzt (vgl. Satz F 9, 2. Fall mit  $q = \frac{\beta}{m}$  und  $r = \frac{D}{m}$ ). In diesem Falle gilt  $\frac{D}{m} = (\frac{\beta}{2m})^2$  oder  $\beta = 2 \sqrt{D \cdot m}$ . Für die betrachtete Federanordnung liegt dieser

Grenzwert bei  $\beta = 2,040 \text{ kg s}^{-1}$  bzw. bei  $\delta = 1,020 \text{ s}^{-1}$ . **Nach Satz F 9,**

**2. Fall,** ergibt sich die allgemeine Lösung

$$y(t) = c_1 e^{-1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t} + c_2 t \cdot e^{-1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t}. \text{ Werden auch hier die}$$

bekannten Anfangsbedingungen benutzt, so erhält man

$$y(t) = 10 \text{ m} \cdot t \cdot e^{-1,020 \text{ s}^{-1} \cdot t} \quad (\text{vgl. Graph 3 in Fig. F 66}).$$

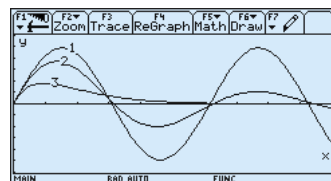


Fig. F 66