

B Arbeiten mit Zahlenfolgen und Reihen

Viele Besucher steigen an schönen Sommertagen die Treppen zum Potsdamer Schloss Sanssouci hinauf. Bei genauer Beobachtung kann man feststellen, dass die meisten die lange Treppe Stufe für Stufe „erklimmen“. Aber es gibt auch nicht wenige, vor allem jugendliche Besucher, die der „Kleinschrittigkeit“ schnell überdrüssig werden und alsbald damit beginnen, auch einmal zwei Stufen auf einmal zu nehmen (was wegen der „Tiefe“ der Stufen gar nicht so einfach ist). Setzen wir also voraus, dass Anton und seine Freunde zwar die erste Stufe auf jeden Fall betreten, dann aber entweder weiter nur eine oder aber zwei Stufen auf einmal. Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es dann, die n -te Stufe zu erreichen?

Für kleine n ist der Sachverhalt noch leicht zu übersehen. Sei etwa $n = 5$. Dann gilt:

Stufe n	Anzahl der Möglichkeiten, Stufe n zu erreichen
1	1
2	1, nämlich genau zweimal 1 Stufe
3	2, nämlich genau dreimal 1 Stufe oder einmal 1 Stufe und einmal 2 Stufen
4	3, nämlich (1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1)
5	5, nämlich (1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 2, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 2)

Für $n = 6$ und $n = 7$ würde sich diese Möglichkeiten-Folge mit den Zahlen 8 und 13 fortsetzen.

Auf dieselben Zahlen stieß der italienische Mathematiker LEONARDO von Pisa (1175–1240?) – bekannter unter seinem Beinamen FIBONACCI –, als er die Frage untersuchte:

Wie viel Kaninchenpaare können in einem Jahr von einem einzigen Paar erzeugt werden, wenn jedes Paar in jedem Monat ein neues Paar erzeugt, das vom zweiten Monat an selbst wieder neue Paare erzeugt usw., falls keine Todesfälle vorkommen?

Ihm zu Ehren heißen die o. g. Zahlen auch FIBONACCI-Zahlen bzw. FIBONACCI-Folge.

Es ist ein Formelausdruck gesucht, der die Bildungsgesetzmäßigkeit der genannten FIBONACCI-Folge von Zahlen beschreibt (s. Beispiele B 6 und B 38).



B 1 Zahlenfolgen

B 1.1 Der Begriff Zahlenfolge

Mathematisch handelt es sich bei dem auf Seite S. 37 geschilderten Einleitungsproblem um eine Funktion: Jeder Treppenstufe wird eine bestimmte Anzahl von Möglichkeiten zugeordnet.

Treppenstufe	1	2	3	4	5	6	7	8	...
Anzahl der Möglichkeiten	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Auch das folgende Beispiel enthält einen funktionalen Zusammenhang:

Mit einem vom Arzt verordneten Arzneimittel nimmt ein Patient täglich 5 mg eines bestimmten Medikaments in Form einer Tablette ein. Im Laufe eines Tages werden davon 40 % vom Körper abgebaut und ausgeschieden. Auch hier liegt eine Funktion vor:

Tag	1	2	3	4	...
Menge des Medikaments in mg	5	8	9,8	10,88	...

Beide Beispiele haben eines gemeinsam: Die geordneten Paare sind dadurch gekennzeichnet, dass an erster Stelle stets eine natürliche Zahl steht. Der Definitionsbereich der hier betrachteten Funktionen ist also die Menge der natürlichen Zahlen (bzw. eine Teilmenge davon). Funktionen dieser Form nennt man **Zahlenfolgen** und weil diese Zahlenfolgen an zweiter Stelle der geordneten Paare reelle Zahlen aufweisen, spricht man von *reellen Zahlenfolgen*.

B 1

Definition B 1:

Eine Funktion, deren Definitionsbereich die Menge \mathbb{N} der natürlichen Zahlen (oder eine Teilmenge der natürlichen Zahlen) ist und die eine Teilmenge der reellen Zahlen als Wertebereich besitzt, heißt **reelle Zahlenfolge**.

Man schreibt für die Zahlenfolge mit den Gliedern $a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots$ kurz (a_n) und spricht „*Folge a_n* “. Dabei bedeutet

- n die Platznummer (den Index),
- a_i das i -te Glied der Zahlenfolge.

Da Zahlenfolgen als spezielle Funktionen definiert wurden, kann man die von dort bekannten **Darstellungsmöglichkeiten** auf Folgen übertragen. So lässt sich auch zu einer Zahlenfolge eine **Gleichung** aufstellen, eine **Wertetabelle** anlegen und ein **Graph** zeichnen.

Kehren wir noch einmal zum Beispiel der Medikamentenaufnahme (Wachstumsprozess) zurück. Die oben angegebene Wertetabelle entstand, indem man aus dem Folgenglied a_n jeweils das nachfolgende a_{n+1} nach folgendem Verfahren berechnete:

$$a_{n+1} = a_n - 0,4a_n + 5, \text{ also } a_{n+1} = (1 - 0,4)a_n + 5 \text{ bzw. } a_{n+1} = 0,6a_n + 5$$

Mit der letzten Gleichung und einer Angabe zu a_1 ist eine **rekursive Bildungsvorschrift**¹⁾ (bzw. eine *Rekursionsgleichung*) für diese Folge gegeben. Ein GTA liefert schnell den Graphen dieser Folge. Die Darstellung macht zugleich deutlich:

- (1) Der Graph einer Folge besteht im Unterschied zu den bislang betrachteten Funktionsbildern (mit der Menge \mathbb{R} als Definitionsbereich) hier nur aus einzelnen (isolierten) Punkten.

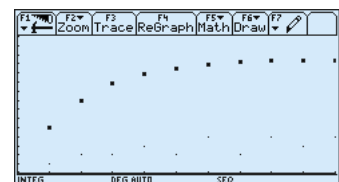


Fig. B 1

¹⁾ recurrere (lat.) – zurücklaufen

- (2) Bei diesem Wachstumsvorgang stellt sich eine „Sättigungsgrenze“ ein. Nach etwa 10 Tagen sind jeweils unmittelbar nach der Einnahme praktisch konstant 12,5 mg des Medikaments im Körper des Patienten enthalten.

Zahlenfolgen lassen sich auch durch eine **explizite Bildungsvorschrift**¹⁾ darstellen. Sie ist dadurch gekennzeichnet, dass das allgemeine Glied a_n der Zahlenfolge (a_n) allein von n abhängig ist. Jedes Glied a_k lässt sich hier durch Einsetzen der Platznummer k in die explizite Bildungsvorschrift bestimmen. Im Unterschied dazu gibt die oben genannte *rekursive Bildungsvorschrift* an, wie man ein beliebiges Glied a_{k+1} der Folge aus seinem Vorgänger a_k ($k > 1$) erhält und wie das Anfangsglied a_1 lautet. Rekursive Bildungsvorschriften von Zahlenfolgen können sich auch auf zwei oder mehr Vorgänger beziehen (s. Beispiel B 6).

Beispiel B 1:

Das allgemeine Glied $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ stellt eine explizite Bildungsvorschrift für die Zahlenfolge

$$(a_n) = \left(\frac{n-1}{n+1}\right) = (1; 0); (2; \frac{1}{3}); (3; \frac{2}{4}); (4; \frac{3}{5}); \dots \text{dar.}$$

B 1

An Stelle der Paarschreibweise verwendet man für die Angabe von Zahlenfolgen in der Regel eine verkürzte Notierung: Man führt nur die Elemente des Wertebereichs auf – die zugehörigen Elemente des Definitionsbereiches ergeben sich aus der Position. Die Zahlenfolge aus Beispiel B 1 wäre dann in der Form zu schreiben: $(a_n) = 0; \frac{1}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{5}; \dots$ Mit $\frac{3}{5}$, das an der 4. Position der Zahlenfolge steht, wäre bei ausführlicher Schreibweise also das Zahlenpaar $(4; \frac{3}{5})$ bzw. $a_4 = \frac{3}{5}$ gemeint. Allgemein schreibt man: $(a_n) = a_1; a_2; a_3; \dots$

Beispiel B 2:

- a) Die Folge der Vielfachen von 8, also $a_1 = 8, a_2 = 16, a_3 = 24, \dots$, lässt sich explizit durch das allgemeine Glied $a_n = 8 \cdot n$ bzw. rekursiv durch die Vorgabe $a_1 = 8$ und $a_{k+1} = a_k + 8$ beschreiben.

- b) Betrachtet wird die Folge der abwechselnd positiven und negativen Potenzen von 4:
4; -16; 64; ...

Explizite Bildungsvorschrift: $a_n = (-1)^{n+1} \cdot 4^n \quad (n \geq 1)$

Rekursive Bildungsvorschrift: $a_1 = 4; a_{k+1} = a_k \cdot (-4)$

B 2

Beispiel B 3:

Jeder natürlichen Zahl n mit $0 < n \leq 10$ ist die Anzahl $T(n)$ ihrer Teiler zuzuordnen.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T(n)	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

B 3

Beispiel B 4:

Die ganze Zahl 4 werde fortlaufend halbiert. Man ermittle die sich ergebenden Werte $H(n)$ nach n Halbierungen.

n	1	2	3	4	5	6	7	...
H(n)	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$...

B 4

¹⁾ explicare (lat.) – erklären, entwickeln

In Abhängigkeit davon, ob der Definitionsbereich endlich viele oder unendlich viele natürliche Zahlen enthält, spricht man von **endlichen Zahlenfolgen** (Beispiel B 3) oder **unendlichen Zahlenfolgen** (Beispiele B 1, B 2, B 4). Sind alle Glieder einer Zahlenfolge untereinander gleich, so handelt es sich um eine **konstante Zahlenfolge**.

B 5

Beispiel B 5:

$(a_n) = (\frac{2}{1^n}) = 2; 2; 2; 2; \dots$ ist eine konstante Zahlenfolge

B 6

Beispiel B 6:

Wir greifen noch einmal auf das „Treppen-Beispiel“ (s. Seite S. 37) zurück: Auch hierbei handelt es sich um eine Zahlenfolge, allerdings mit einem etwas komplizierteren Bildungsgesetz.

Die Anzahl der Möglichkeiten, die n -te Stufe zu erreichen, sei m_n . Die erste Treppenstufe lässt sich allein auf eine Weise erreichen; ebenso kann man lt. Voraussetzung zur zweiten Stufe nur gelangen, indem man zuerst auf die erste Stufe und dann mit einem „gewöhnlichen“ Schritt weiter auf die zweite Stufe steigt. Also gilt

$m_1 = 1$ und $m_2 = 1$. Um die $(n+2)$ -te Stufe zu erreichen, gibt es zwei Möglichkeiten:

- (1) Man kommt von der $(n+1)$ -ten Stufe. Da m_{n+1} Möglichkeiten existieren, auf die $(n+1)$ -te Stufe zu gelangen, gibt es in diesem Falle also auch genau m_{n+1} Varianten, die $(n+2)$ -te Stufe zu erreichen.
- (2) Man kommt in einem großen „Satz“ direkt von der n -ten Stufe. Jetzt gibt es genau m_n Möglichkeiten, auf die $(n+2)$ -te Stufe zu gelangen.

Zusammengefasst ergibt sich aus (1) und (2): $m_{n+2} = m_{n+1} + m_n$. Die Folge der „Möglichkeiten-Anzahl“, allgemein: die FIBONACCI-Folge lässt sich damit (bei Umnummerierung und Verwenden der Symbolik von Seite S. 38) durch die rekursive Bildungsvorschrift

$a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ beschreiben.

Mithilfe dieser Vorschrift sowie des Funktions- und des Tabellenmenüs eines GTA lassen sich auch Folgenglieder mit höherem Index schnell berechnen (Fig. B 2 bis B 4).

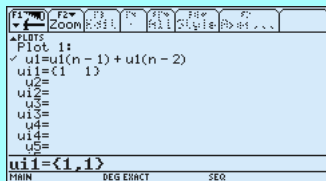


Fig. B 2

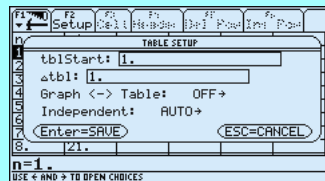


Fig. B 3

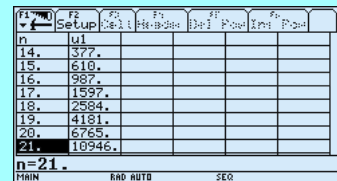


Fig. B 4

B 1.2 Eigenschaften von Zahlenfolgen

Für die Zahlenfolgen in den Beispielen B 1, B 3 und B 4 liefert der GTA die nachstehenden grafischen Darstellungen (Fig. B 5a, B 5b bzw. B 5c):

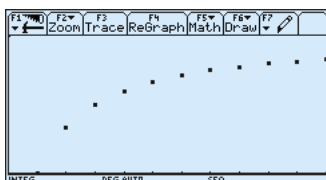


Fig. B 5a

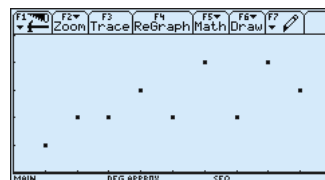


Fig. B 5b

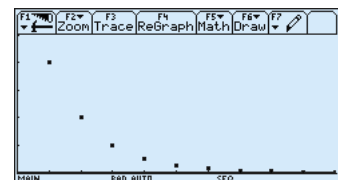


Fig. B 5c

Bei einem Vergleich lassen sich folgende Feststellungen treffen:

Im Beispiel B 1 (Fig. B 5a) scheinen die Folgenglieder ständig zu wachsen, erreichen aber zum Beispiel nie den Wert 1. Im Beispiel B 4 (Fig. B 5c) werden sie fortgesetzt kleiner, nehmen aber nie negative Werte an. Die Folgenglieder im Beispiel B 3 (Fig. B 5b) weisen in dieser Hinsicht keine Regelmäßigkeiten auf.

Das Verhalten der Zahlenfolgen in den Beispielen B 2 und B 4 wird wie bei Funktionen als *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend* und *beschränkt* bezeichnet.

Definition B 2:

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt genau dann¹⁾

monoton wachsend,		monoton fallend,
wenn für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt		
$a_{n+1} \geq a_n$		$a_{n+1} \leq a_n$

Ist jedes Folgenglied tatsächlich größer bzw. kleiner als seine Vorgänger (und nicht gleich), so spricht man von **strenger Monotonie**.

B 2

Konstante Zahlenfolgen lassen sich sowohl als monoton wachsend wie auch als monoton fallend auffassen: Mit $a_k = a_{k+1}$ gilt $a_k \geq a_{k+1}$ und ebenso $a_k \leq a_{k+1}$. Es liegt aber *keine strenge* Monotonie vor. Um eine Zahlenfolge (a_n) auf Monotonie zu untersuchen, formt man die in der Definition B 2 benutzten Ungleichungen zweckmäßigerweise in Differenzen um.

Gilt für alle $n \geq 1$

- $a_{n+1} - a_n \geq 0$, so ist (a_n) monoton wachsend;
- $a_{n+1} - a_n > 0$, so ist (a_n) streng monoton wachsend;
- $a_{n+1} - a_n \leq 0$, so ist (a_n) monoton fallend;
- $a_{n+1} - a_n < 0$, so ist (a_n) streng monoton fallend.

Man untersucht also, ob die Differenzen benachbarter Glieder stets nichtnegativ oder nichtpositiv sind.

Beispiel B 7:

Die explizite Bildungsvorschrift der Zahlenfolge aus Beispiel B 4 lautet $a_n = \frac{4}{2^n}$.

Die grafische Darstellung in Fig. B 5c legt die Vermutung nahe, dass diese Zahlenfolge streng monoton fallend ist. Zur Bestätigung dieser Vermutung muss gezeigt werden, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $a_{n+1} - a_n < 0$ gilt.

$$\text{Aus } a_{n+1} - a_n = \frac{4}{2^{n+1}} - \frac{4}{2^n} = \frac{4}{2^{n+1}} - \frac{4 \cdot 2}{2^n \cdot 2}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{2^{n+1}} - \frac{8}{2^{n+1}} = -\frac{4}{2^{n+1}}.$$

Da der Zähler und Nenner dieses Bruches stets größer als 0 ist, gilt $-\frac{4}{2^{n+1}} < 0$. Somit ist gezeigt, dass die Zahlenfolge $(a_n) = \left(-\frac{4}{2^n}\right)$ streng monoton fallend ist.

B 7

¹⁾ Die Formulierung „genau dann“ steht für „dann und nur dann“ – es handelt sich um wechselseitig gültige Beziehungen, also: monoton wachsend $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ bzw. monoton fallend $\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$.

B 8

Beispiel B 8:

Wir untersuchen das Monotonieverhalten der Zahlenfolge $(\frac{1}{(2n-19)^2})$ schrittweise.

(1) Zunächst bestimmen wir die ersten fünf Glieder der Zahlenfolge:

$$(\frac{1}{(2n-19)^2}) = \frac{1}{289}; \frac{1}{225}; \frac{1}{169}; \frac{1}{121}; \frac{1}{81}; \dots$$

(2) Aus diesen Anfangsgliedern lässt sich vermuten, dass die Zahlenfolge streng monoton wachsend ist.

(3) Sollte das der Fall sein, dann ist zu beweisen, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung

$$a_{n+1} - a_n > 0 \text{ gilt.}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{1}{(2(n+1)-19)^2} - \frac{1}{(2n-19)^2} = \frac{1}{(2n-17)^2} - \frac{1}{(2n-19)^2} \\ &= \frac{(2n-19)^2 - (2n-17)^2}{(2n-17)^2 \cdot (2n-19)^2} = \frac{4n^2 - 76n + 361 - 4n^2 + 68n - 289}{(2n-17)^2 \cdot (2n-19)^2} = \frac{-8n + 72}{(2n-17)^2 \cdot (2n-19)^2} \end{aligned}$$

(4) Wir schätzen diesen Bruch ab: Der Nenner ist als Produkt zweier Quadrate für alle $n \geq 1$ positiv, der Zähler wird allerdings für $n > 9$ negativ. Also:

$$\text{Für } n \leq 9 \text{ gilt } a_{n+1} - a_n \geq 0; \quad \text{für } n > 9 \text{ gilt } a_{n+1} - a_n < 0.$$

(5) Das heißt: Die Folge $(\frac{1}{(2n-19)^2})$ ist nicht monoton. Vom 1. bis zum 9. Glied ist sie wachsend, vom 10. Glied an streng monoton fallend. Unsere Vermutung wurde nicht bestätigt.

Das Beispiel B 8 zeigt, dass man beim Untersuchen einer Zahlenfolge auf Monotonie aus dem Berechnen nur einiger Folgenglieder keine voreiligen Schlüsse ziehen darf.

B 9

Beispiel B 9:

Wir betrachten die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$, d.h. $(a_n) = -1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{4}; -\frac{1}{5}; \dots$

Diese Folge ist nicht monoton, denn für gerades n gilt $a_n > 0 > a_{n+1}$ und für ungerades n gilt $a_n < 0 < a_{n+1}$. Derartige Folgen, bei denen die Folgenglieder abwechselnd positiv und negativ sind, heißen **alternierende Zahlenfolgen**.

Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ ist eine streng monoton wachsende Folge, deren Glieder jedoch offensichtlich niemals den Wert 1 überschreiten. Dies führt zu folgender allgemeiner Begriffsbildung:

B 3

Definition B 3:

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt genau dann

nach oben beschränkt,

nach unten beschränkt,

wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle Folgenglieder a_n gilt:

$$a_n \leq s$$

$$a_n \geq s$$

Man nennt die reelle Zahl s dann

eine **obere Schranke**

eine **untere Schranke**

der Zahlenfolge (a_n) .

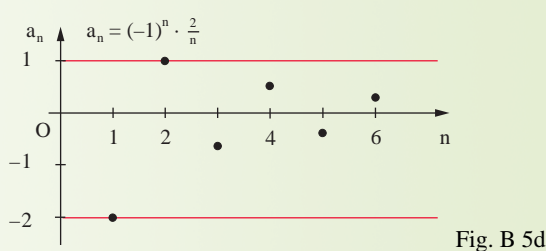
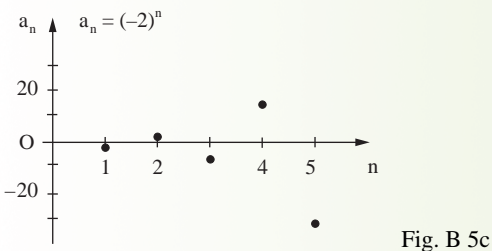
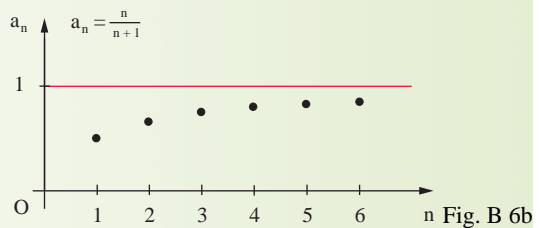
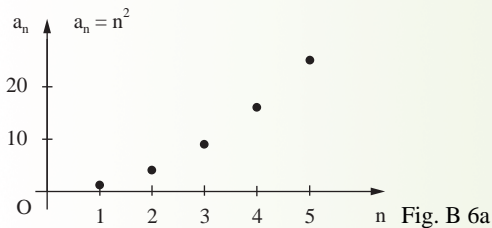
(Einfach von einer „Schranke“ spricht man, wenn $|a_n| \leq s$, also wenn alle a_n in dem Intervall $[-s; s]$ liegen.)

Definition B 4:

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt genau dann **beschränkt**, wenn sie nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

B 4

Mit anderen Worten: Man nennt eine Zahlenfolge beschränkt, wenn die Werte aller Folgenglieder nicht „unterhalb“ einer bestimmten Zahl s_1 und auch nicht „oberhalb“ einer bestimmten Zahl s_2 liegen. Auch die Beschränktheit von Zahlenfolgen kann man an ihren grafischen Darstellungen untersuchen. In den Figuren B 6a–d sind die Anfangsglieder einiger Zahlenfolgen dargestellt.



Aus den Darstellungen lassen sich folgende Vermutungen entnehmen:

Zahlenfolge (a_n)	hat die obere Schranke	hat die untere Schranke	ist beschränkt
$a_n = n^2$	–	0	nein
$a_n = \frac{n}{n+1}$	1	0	ja
$a_n = (-2)^n$	–	–	nein
$a_n = (-1)^n \cdot \frac{2}{n}$	1	–2	ja

Genau wie bei der Untersuchung auf Monotonie müssen diese Vermutungen bewiesen werden, indem man zeigt, dass tatsächlich eine reelle Zahl s existiert, die der Bedingung $|a_n| \leq s$ genügt (vgl. Definition B 3).

Beispiel B 10:

Am Beispiel der Zahlenfolge $(a_n) = (\frac{n}{n+1})$ soll gezeigt werden, dass 1 eine obere Schranke sowie 0 eine untere Schranke dieser Folge ist und dass demzufolge (a_n) nach Definition B 4 eine beschränkte Zahlenfolge darstellt.

- a) Um nachzuweisen, dass 1 eine obere Schranke der Zahlenfolge ist, zeigen wir, dass für alle $n \geq 1$ die Ungleichung $\frac{n}{n+1} \leq 1$ bzw. $0 \leq 1 - \frac{n}{n+1}$ gilt (vgl. Definition B 3).

B 10

Umformung der Ungleichung ergibt: $0 \leq 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$. Da diese Ungleichung von allen $n \geq 1$ erfüllt wird, gilt stets $\frac{n}{n+1} \leq 1$. Also ist 1 eine obere Schranke.

b) Wenn 0 eine untere Schranke ist, muss gelten: $\frac{n}{n+1} \geq 0$ für alle $n \geq 1$. Da für den Zähler $n \geq 1$ und für den Nenner $n+1 \geq 2$ gilt, ist diese Ungleichung ebenfalls gesichert. Die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{n}{n+1}$ besitzt also eine obere und eine untere Schranke. Damit ist die Vermutung bestätigt, dass diese Folge beschränkt ist (vgl. Definition B 4).

B 1.3 Partialsummen; Partialsummenfolgen

Für die Entwicklung eines nach marktwirtschaftlichen Gesichtspunkten geführten Unternehmens ist es wichtig, jeweils am Monatsende den erzielten Monatsumsatz des Betriebes zu kennen.

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
Umsatz in Mio. Euro	3,4	3,2	5,1	4,7	4,5	3,7	2,9	2,6	3,9	4,8	5,3	3,5

Ausgehend von diesen Daten richten sich Entscheidungen der Unternehmensleitung nach den kumulativen¹⁾ Umsatzzahlen im Vergleich zum angestrebten Jahresumsatz, also nach dem bis zum jeweiligen Monat erzielten Gesamtumsatz.

Monat	Jan.	Feb.	März	April	Mai	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dez.
kum. Umsatz, in Mio. Euro	3,4	6,6	11,7	16,4	20,9	24,6	27,5	30,1	34,0	38,8	44,1	47,6

Damit ist aus der zunächst betrachteten zwölfgliedrigen Zahlenfolge eine neue Zahlenfolge entstanden, in dem jeweils die Summen der entsprechenden Folgenglieder gebildet wurde. In betriebswirtschaftlichen Bereichen treten solche Summenbildungen nicht nur bei den Umsätzen, sondern auch bei anderen Kenngrößen auf, z. B. bei Herstellungskosten, Auftragsbestand, Lohnkosten usw.

Ist $(a_n) = a_1; a_2; a_3; \dots$ eine Zahlenfolge, dann bezeichnet man in der Mathematik die durch Summenbildung über mehrere Folgenglieder entstehenden Zahlen

$$s_1 = a_1; \quad s_2 = a_1 + a_2; \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3; \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

als **Partialsummen** (Teilsommen) der Folge (a_n) . Zum Beispiel ist $s_1 = a_1$ die erste, $s_2 = a_1 + a_2$ die zweite, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ die dritte Partialsumme von (a_n) usw. $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ wäre dann die **n-te Partialsumme** von (a_n) , bestehend aus n Summanden. Die Partialsummen von (a_n) bilden wiederum eine Folge $(s_n) = s_1; s_2; s_3; \dots; s_n$. Sie wird **Partialsummenfolge** oder **Teilsommenfolge** von (a_n) genannt. Man kann sie rekursiv beschreiben durch

$$s_1 = a_1 \quad \text{und} \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \quad \text{für alle } n \geq 1.$$

Zur Verkürzung der Schreibweise für Partialsummen wird das Summenzeichen Σ verwendet²⁾. Für die n-te Partialsumme $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ der Folge (a_n) schreibt man kurz

$$\sum_{k=1}^n a_k \quad \text{gelesen: „Summe aller } a_k \text{ von } k = 1 \text{ bis } n\text{“}$$

¹⁾ cumulare (lat.) – anhäufen

²⁾ Das Zeichen Σ ist der griechische Buchstabe Sigma. Es entspricht dem S in der lateinischen Schrift und wurde schon von Leonhard EULER als bequeme Schreibweise von Summen eingeführt.

Bei der Arbeit mit dem Summenzeichen ist zu beachten:

- Es spielt keine Rolle, welcher Buchstabe für den Laufindex gewählt wird. Beispielsweise gilt:

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{m=1}^n a_m = \sum_{p=1}^n a_p$$

- Mitunter ist es zweckmäßig, den Laufindex zu verändern. So kann man zum Beispiel anstatt

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ auch } \sum_{k=-3}^{n-4} a_{k+4} \text{ oder } \sum_{k=3}^{n+2} a_{k-2} \text{ usw. schreiben.}$$

- Ist c konstant, so gilt $\sum_{k=1}^n c = n \cdot c$ und $\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^n a_k$.

- $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$

Beispiel B 11:

Durch Einsetzen erhält man:

a) $\sum_{k=1}^5 (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$

b) $\sum_{i=1}^4 (4i+1) = 5 + 9 + 13 + 17 = 34$

c) $\sum_{n=0}^5 (-1)^n \cdot (2^n) = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 = -21$

B 11

Beispiel B 12:

Für die Folge der ungeraden natürlichen Zahlen $(a_k) = (2k-1) = 1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots$ ergeben sich beispielsweise folgende **Partialsummen**:

$$s_1 = \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1$$

$$s_2 = \sum_{k=1}^2 (2k-1) = 1 + 3 = 4$$

$$s_3 = \sum_{k=1}^3 (2k-1) = 1 + 3 + 5 = 9$$

$$s_4 = \sum_{k=1}^4 (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$s_5 = \sum_{k=1}^5 (2k-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

B 12

B 1.4 Arithmetische und geometrische Zahlenfolgen

Beispiel B 13:

Eine Schnecke kriecht an einer 5 m hohen Hauswand empor. Am Tage möge sie 10 cm nach oben kriechen, nachts wieder 3 cm nach unten rutschen.

Am wievielten Tag erreicht sie das Dach?

Tage n	erreichte Höhe h_n am Ende des n -ten Tages
1	10 cm
2	10 cm + 7 cm
3	10 cm + 2 · 7 cm
4	10 cm + 3 · 7 cm
...	
n	10 cm + $(n-1) \cdot 7$ cm

B 13

Für die am n -ten Tag erreichte Höhe gilt demnach $h_n = 10 \text{ cm} + (n - 1) \cdot 7 \text{ cm}$.
 Soll die Schnecke am n -ten Tag das Dach erreichen, so muss gelten: $h_n \geq 500 \text{ cm}$
 Daraus folgt: $10 \text{ cm} + (n - 1) \cdot 7 \text{ cm} \geq 500 \text{ cm}$, also $(n - 1) \cdot 7 \text{ cm} \geq 490 \text{ cm}$
 und somit $(n - 1) \geq 70$ bzw. $n \geq 71$.
 Das heißt: Die Schnecke hat am 71. Tag das Dach erreicht.

Die im Beispiel B 13 betrachtete Folge (h_n) weist die Regelmäßigkeit auf, dass die Differenz aufeinander folgender Glieder stets 7 ergibt. Solche Folgen werden **arithmetische Folgen** genannt.

B 5

Definition B 5:

Eine Zahlenfolge (a_n) heißt **arithmetische Zahlenfolge**, wenn für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder stets dieselbe reelle Zahl d ergibt:

$$a_{n+1} - a_n = d \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

Aus dieser Festlegung folgt, dass jede arithmetische Zahlenfolge durch den Anfangswert a_1 und die Differenz d eindeutig bestimmt ist: Wir erhalten jedes Glied einer arithmetischen Zahlenfolge aus dem vorhergehenden durch Addition von d : $a_{n+1} = a_n + d$

Ist a_1 bekannt, haben wir damit eine rekursive Darstellung arithmetischer Zahlenfolgen gefunden.

Es gilt somit

$$\begin{aligned} a_2 &= a_1 + d \\ a_3 &= a_2 + d = a_1 + 2d \\ a_4 &= a_3 + d = a_1 + 3d \\ a_5 &= a_4 + d = a_1 + 4d \\ &\vdots \\ a_n &= a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d \end{aligned}$$

Durch Verallgemeinern gelangt man hieraus zu der Vermutung

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

die sich mittels des *Beweisverfahrens der vollständigen Induktion* beweisen lässt:

I. *Induktionsanfang:*

$$\mathbf{A(1):} \quad a_1 + (1-1)d = a_1$$

II. *Induktionsschluss:*

Induktionsvoraussetzung:

$$\mathbf{A(k):} \quad a_k = a_1 + (k-1)d$$

Induktionsbehauptung:

$$\mathbf{A(k+1):} \quad a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d = a_1 + kd$$

Induktionsbeweis:

$\mathbf{A(k) \Rightarrow A(k+1):}$ Wir addieren zum k -ten Glied die Differenz d und erhalten

$$a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd - d + d = a_1 + kd = a_{k+1}$$

Wegen der unter I. und II. geführten Beweise gilt obige Formel für alle $n \in \mathbb{N}^*$.

B 1

Satz B 1: **Bildungsvorschrift einer arithmetischen Zahlenfolge**

Ist (a_n) eine arithmetische Zahlenfolge, so gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und $d \in \mathbb{R}$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \quad (\text{explizite Bildungsvorschrift}).$$

Aus der rekursiven Darstellung arithmetischer Zahlenfolgen $a_{n+1} = a_n + d$ lässt sich folgern:

Eine arithmetische Zahlenfolge mit

- $d > 0$ ist eine streng monoton wachsende Folge,
- $d < 0$ ist eine streng monoton fallende Folge,
- $d = 0$ (als Spezialfall) ergibt die konstante Folge $a_1; a_1; a_1; \dots$

Eine weitere Eigenschaft von arithmetischen Zahlenfolgen ist die Tatsache, dass das mittlere Glied dreier beliebiger benachbarter Glieder stets das arithmetische Mittel der zwei anderen ist. Daher rührt auch der Name „arithmetische“ Zahlenfolge. Wenn nämlich

$a_{k-1} = a_1 + (k-2)d$, $a_k = a_1 + (k-1)d$ und $a_{k+1} = a_1 + kd$ ist, dann gilt:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \frac{a_1 + (k-2)d + a_1 + kd}{2} = \frac{2a_1 + 2kd - 2d}{2} = a_1 + (k-1)d.$$

Beispiel B 14:

Man ermittle für eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = 4$ und $d = 3$ die Bildungsvorschrift, die ersten 5 Glieder und das 41. Glied.

- Mit $a_1 = 4$ und $d = 3$ lautet nach Satz B 1 die Bildungsvorschrift der gegebenen Zahlenfolge $a_n = 4 + (n-1)3 = 3n + 1$.
- Nach dieser Bildungsvorschrift sind 4; 7; 10; 13 und 16 die ersten 5 Glieder der Folge.
- Nach Satz B 1 heißt das 41. Glied $a_{41} = 4 + (41-1)3 = 124$.

B 14

Beispiel B 15:

Aufgrund von Beobachtungen über die Eigenwärme der Erde stellte man fest, dass die Wärme der Erde in 25 m Tiefe etwa mit der mittleren Jahrestemperatur des Beobachtungsortes übereinstimmt. Dringt man tiefer in die Erde ein, so erhöht sich auf jeweils 32 m die Temperatur um 1°C .

- In welcher Erdtiefe herrschen 25°C , wenn die mittlere Jahrestemperatur des Beobachtungsortes 10°C beträgt?
- Wie hoch ist die Temperatur in 1145 m Tiefe?

Lösung:

- Eine Lösungsmöglichkeit besteht darin, die Beziehungen 10°C in 25 m Tiefe, 11°C in 57 m Tiefe, 12°C in 89 m Tiefe usw. mittels einer arithmetischen Zahlenfolge zu erfassen. Dann gilt: $a_1 = 25$, $d = 32$ und $a_n = 25 + 32(n-1) = 32n - 7$, wobei a_n die Tiefe bei einer Temperatur von $(9+n)^\circ$ angibt. Mit anderen Worten: Der um 9 vermehrte Gliedindex entspricht der jeweiligen Temperatur.

Wegen $n + 9 = 25$ erhält man also mit $n = 16$ die Gliednummer und mit

$a_{16} = 25 + 15 \cdot 32 = 505$ die zu berechnende Tiefe. In etwa 505 m Tiefe findet man eine Temperatur von 25°C vor.

- Wegen $25 + 32(n-1) = 1145$ erhält man $n = 36$. Der um 9 vermehrte Gliedindex ist also $36 + 9 = 45$. Die Temperatur in 1145 m Tiefe beträgt demnach rund 45°C .

B 15

Beispiel B 16:

Gegeben sei die Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = 2n + 3$. Wir bilden die Differenz

$$a_{n+1} - a_n = (2(n+1) + 3) - (2n + 3) = 2n + 2 + 3 - 2n - 3 = 2$$

(a_n) ist also eine **arithmetische Zahlenfolge** mit der konstanten Differenz $d = 2$. Die Zahlenfolge beginnt mit den Gliedern 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; ...

B 16

Bildet man die Partialsummen der in Beispiel B 14 betrachteten Zahlenfolge, so ergibt sich:

$$\begin{array}{ll} s_1 = 5 & = 5 \\ s_2 = 5 + 7 & = 12 \\ s_3 = 5 + 7 + 9 & = 21 \\ \vdots & \\ s_n = 5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3) & \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{ll} s_1 = 5 \\ s_2 = 5 + (5 + 1 \cdot 2) \\ s_3 = 5 + (5 + 1 \cdot 2) + (5 + 2 \cdot 2) \\ \vdots \\ s_n = 5 + (5 + 1 \cdot 2) + (5 + 2 \cdot 2) + \dots + [5 + (n - 1) \cdot 2] \end{array}$$

Davon ausgehend sollen nun die Partialsummen einer allgemeinen arithmetischen Folge (a_n) mit $a_n = a_1 + (n - 1)d$ berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{array}{ll} s_1 = a_1 & = a_1 \\ s_2 = a_1 + a_2 & = a_1 + (a_1 + d) \\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3 & = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) \\ \vdots & \\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n & = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) + \dots + (a_1 + (n - 1)d) \end{array}$$

Um für die n -te Partialsumme einer arithmetischen Zahlenfolge eine Formel zu gewinnen, benutzen wir die „Strategie“, die der deutsche Mathematiker Carl Friedrich GAUSS bereits als neunjähriger Schüler fand: Sein Lehrer stellte ihm die Aufgabe, die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100 zu berechnen. Der Überlieferung nach löste er die Aufgabe in wenigen Augenblicken wie folgt:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \dots + (50 + 51) = 50 \cdot 101 = 5050$$

Wir verwenden diese Idee in folgender Weise:

$$\begin{array}{r} s_n = a_1 \qquad \qquad \qquad + (a_1 + d) \qquad \qquad \qquad + \dots \qquad + (a_1 + (n - 2)d) \qquad + (a_1 + (n - 1)d) \\ + s_n = (a_1 + (n - 1)d) \quad + (a_1 + (n - 2)d) \quad + \dots \quad + (a_1 + d) \qquad \qquad + a_1 \\ \hline 2 \cdot s_n = (2a_1 + (n - 1)d) + (2a_1 + (n - 1)d) + \dots + (2a_1 + (n - 1)d) + (2a_1 + (n - 1)d) \\ 2 \cdot s_n = n(2a_1 + (n - 1)d) \\ s_n = na_1 + \frac{n(n - 1)d}{2} \end{array}$$

Klammert man $\frac{n}{2}$ aus und ersetzt $(a_1 + (n - 1)d)$ durch a_n , so ergibt sich als zweite Darstellung:

$$s_n = na_1 + \frac{n(n - 1)d}{2} = \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2} (a_1 + a_n)$$

B 2

Satz B 2: **Partialsumme einer arithmetischen Zahlenfolge**

Ist $(a_n) = a_1; a_2; a_3; \dots$ eine arithmetische Zahlenfolge mit der Differenz d , so gilt für deren

$$n\text{-te Partialsumme } s_n = \sum_{k=1}^n (a_1 + (k - 1)d) = na_1 + \frac{n(n - 1)d}{2}.$$

Auch diese hier direkt hergeleitete Formel ließe sich mithilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion beweisen.

B 17

Beispiel B 17:

Man ermittle für eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = 4$ und $d = 3$

- a) die Bildungsvorschrift, b) die ersten 5 Glieder c) die Partialsumme s_{20} .

Lösung:

- a) Mit $a_1 = 4$ und $d = 3$ lautet nach Satz B 1 die Bildungsvorschrift der arithmetischen Zahlenfolge $a_n = 4 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 1$.

- b) Mittels $a_n = 3n + 1$ bestimmt man die ersten 5 Glieder der Folge: 4; 7; 10; 13 und 16.
c) Wir benutzen Satz B 2 und erhalten durch Einsetzen:

$$s_{20} = \sum_{k=1}^{20} (3k+1) = 20 \cdot 4 + \frac{20 \cdot 19 \cdot 3}{2} = 80 + 570 = 650$$

Beispiel B 18:

Man berechne für eine arithmetische Zahlenfolge mit $a_1 = 2$, $d = 3$ und $a_n = 44$

- a) n ,
b) die Bildungsvorschrift,
c) die ersten 5 Glieder und
d) die 10. Partialsumme s_{10} .

Lösung:

- a) Wir benutzen die explizite Bildungsvorschrift $a_n = a_1 + (n-1)d$ (Satz B 1) und setzen ein:
 $44 = 2 + (n-1) \cdot 3$, also $44 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1$. Daraus folgt: $45 = 3n$ und damit $n = 15$.
- b) Wegen $a_1 = 2$ und $d = 3$ heißt die Bildungsvorschrift $a_n = 3n - 1$.
- c) Die ersten 5 Glieder sind 2; 5; 8; 11; 14.
- d) Unter Verwendung von Satz B 2 ergibt sich:

$$s_{10} = \sum_{k=1}^{10} (3k-1) = 10 \cdot 2 + \frac{10 \cdot 9 \cdot 3}{2} = 20 + 135 = 155$$

Beispiel B 19:

Das 10. Glied einer arithmetischen Zahlenfolge sei 32, das 15. Glied sei 47. Man berechne s_{40} . Um nach Satz B 2 die 40. Partialsumme berechnen zu können, ermitteln wir zunächst a_1 und d . Es gilt:

$$32 = a_1 + 9d$$

$$32 = a_1 + 9d$$

$$47 = a_1 + 14d$$

Als Lösung dieses Gleichungssystems erhält man $a_1 = 5$ und $d = 3$. Das Bildungsgesetz heißt demnach $a_n = 5 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 2$ und nach Satz B 2 ergibt sich

$$s_{40} = \sum_{k=1}^{40} (3k+2) = 40 \cdot 5 + \frac{40 \cdot 39 \cdot 3}{2} = 200 + 2340 = 2540.$$

Eine weitere spezielle Art von Folgen ist in einer Anekdote verborgen, die sich um die Erfindung des Schachspiels rankt. Kaiser Sheram soll von diesem intelligenten Spiel derart begeistert gewesen sein, dass er den Erfinder Zeta unbedingt persönlich für die geniale Spielidee belohnen wollte. „Äußere deinen Wunsch, ich werde mit nichts geizen“, forderte er Zeta wohlwollend auf. „Gebieten“, antwortete Zeta, „befehl, mir für das erste Feld des Schachbrettes ein Reiskorn auszuhändigen, 2 Körner für das zweite Feld, 4 Körner für das dritte Feld und für jedes weitere doppelt so viele Körner wie für das vorhergehende Feld.“ Der Kaiser war erstaunt und sprach leicht gereizt: „Du bekommst deine Körner wunschgemäß, doch wisse, dass deine bescheidene Bitte meiner Großmut unwürdig ist.“ Der Kaiser erkannte das Problem offensichtlich nicht, denn er war völlig überrascht, als ihm seine Mathematiker nach mühevoller und Zeit raubender Rechnung das Ergebnis präsentierten. Die Anzahl der Körner auf dem Schachbrett beträgt nämlich

1. Feld: $a_1 = 1 = 2^0 = 2^0$

2. Feld: $a_2 = 2 = 2 \cdot 2^0 = 2^1$

3. Feld: $a_3 = 4 = 2 \cdot 2^1 = 2^2$

4. Feld: $a_4 = 8 = 2 \cdot 2^2 = 2^3$

64. Feld: $a_{64} = 2 \cdot 2^{62} = 2^{63} = 9223372036854775808 \approx 9,2 \cdot 10^{18}$.

B 18

B 19

Die Mathematiker des Kaisers Sheraam haben wohl in dieser Weise gerechnet und die richtige Anzahl der Körner auf dem Schachbrettfeld ermittelt¹⁾.

Die Zahlenfolge heißt also $(a_n) = 1; 2; 4; 8; 16; 31; 64; \dots$ mit dem allgemeinen Glied $a_n = 2^{n-1}$. Ihre Besonderheit besteht darin, dass der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder jeweils den Wert 2 ergibt. Derartige Zahlenfolgen werden **geometrische Zahlenfolgen** genannt.

B 6

Definition B 6:

Eine Zahlenfolge (a_n) mit $a_n \neq 0$ heißt **geometrische Zahlenfolge**, wenn für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder stets gleich derselben reellen Zahl $q \neq 0$ ist:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad (n \in \mathbb{N}^*, a_n \neq 0, q \neq 0)$$

Im Alltagsleben treten geometrische Zahlenfolgen vor allem bei Wachstumsproblemen (z. B. Bakterienkulturen, radioaktiver Zerfall, Anwachsen von Sparguthaben durch Verzinsung, also bei so genannten dynamischen Prozessen) auf. Die Glieder einer geometrischen Zahlenfolge entstehen aus dem Anfangsglied a_1 durch fortlaufende Multiplikation mit dem Quotienten q . Unter der Voraussetzung, dass a_1 bekannt ist, erhält man als rekursive Darstellung für geometrische Zahlenfolgen:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Das heißt: Jede geometrische Folge ist durch ihren Anfangswert a_1 und den Quotienten q eindeutig bestimmt.

Eine geometrische Zahlenfolge mit dem Anfangsglied $a_1 = 5$ und dem Quotienten $q = 2$ beginnt also mit

$$\begin{array}{ll} a_1 & a_1 = 5 \\ a_2 = a_1 \cdot q & a_2 = 5 \cdot 2 = 10 \\ a_3 = a_2 \cdot q = a_1 \cdot q^2 & a_3 = 10 \cdot 2 = 5 \cdot 2^2 = 20 \\ a_4 = a_3 \cdot q = a_1 \cdot q^3 & a_4 = 20 \cdot 2 = 5 \cdot 2^3 = 40 \\ \vdots & \end{array}$$

Das n -te Glied erhält man, indem man das Anfangsglied a_1 ($a_1 \neq 0$) $(n-1)$ -mal mit q multipliziert. Als ein einfaches explizites Bildungsgesetz lässt sich daher vermuten: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$. Der Beweis könnte wiederum durch vollständige Induktion erfolgen.

B 3

Satz B 3: **Bildungsvorschrift einer geometrischen Zahlenfolge**

Ist (a_n) eine geometrische Zahlenfolge, so gilt für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad (q \in \mathbb{R}, q \neq 0)$$

Jede **geometrische Zahlenfolge** (a_n) ist genau dann

- **streng monoton wachsend**, wenn $a_1 > 0$ und $q > 1$ oder $a_1 < 0$ und $0 < q < 1$;
- **streng monoton fallend**, wenn $a_1 > 0$ und $0 < q < 1$ oder $a_1 < 0$ und $q > 1$;
- **alternierend**, wenn $q < 0$.

¹⁾ Nehmen wir an, dass 100 Körner etwa 2 g wiegen (wobei dieser Wert in Abhängigkeit von Sorte, Feuchtigkeitsgehalt usw. schwankt), dann würden allein die auf dem 64. Feld liegenden Körner ein Gewicht von etwa $9,2 \cdot 10^{18} \cdot 0,02 \text{ g} = 1,84 \cdot 10^{11} \text{ t}$ besitzen, was dem rd. 350-fachen der Weltjahresernte von 1994 (ca. $534,7 \cdot 10^6 \text{ t}$) entspräche. Das Volumen der Körner auf dem 64. Feld hätte bei 15 Mill. Körner pro Kubikmeter eine Größe von rd. 610 km^3 .

Charakteristisch für geometrische Zahlenfolgen ist des Weiteren, dass das mittlere Glied von drei benachbarten Gliedern stets das *geometrische Mittel*¹⁾ der zwei anderen ist, was auch zu dem Namen „geometrische“ Zahlenfolge führt. Wenn nämlich

$$a_{k-1} = a_1 \cdot q^{k-2}, \quad a_k = a_1 \cdot q^{k-1} \quad \text{und} \quad a_{k+1} = a_1 \cdot q^k$$

ist, dann gilt:

$$\sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}} = \sqrt{(a_1 \cdot q^{k-2}) \cdot (a_1 \cdot q^k)} = \sqrt{a_1^2 \cdot q^{2(k-1)}} = a_1 \cdot q^{k-1} = a_k \quad (a_1, q > 0)$$

Beispiel B 20:

Für die geometrischen Zahlenfolgen

a) $-3; -6; -12; -24; -48; \dots$ b) $6; 18; 54; 162; 486; \dots$ c) $400; 80; 16; 3,2; 0,64; \dots$

ist das explizite Bildungsgesetz gesucht.

Lösung:

a) Wegen $a_1 = -3$ und $q = 2$ erhält man $a_n = (-3) \cdot 2^{n-1}$;

b) wegen $a_1 = 6$ und $q = 3$ erhält man $a_n = 6 \cdot 3^{n-1}$;

c) wegen $a_1 = 400$ und $q = \frac{1}{5}$ ist $a_n = 400 \cdot (\frac{1}{5})^{n-1}$.

B 20

Beispiel B 21:

(a_n) sei eine geometrische Folge.

a) Man bestimme das 7. Glied der Folge (a_n) mit $a_1 = 48$ und $q = -2$.

b) Die Folge (a_n) mit den Anfangsgliedern $2; 6; 18; 54; \dots$ ist um drei Glieder fortzusetzen.

c) Man bestimme die explizite Bildungsvorschrift von (a_n) mit $a_2 = 2000$ und $a_5 = 1024$.

Lösung:

a) Nach Satz B 3 gilt $a_7 = a_1 \cdot q^6$, woraus folgt: $a_7 = 48 \cdot (-2)^6 = 3072$.

b) Die Division benachbarter Glieder der Zahlenfolge führt zu $q = 3$. Daraus ergeben sich die Folgenglieder $2; 6; 18; 54; 162; 486; 1458$.

c) Aus $a_5 = a_2 \cdot q^3$ folgt $q^3 = \frac{1024}{2000} = \frac{64}{125}$. Also ist $q = \frac{4}{5}$. Aus $a_2 = a_1 \cdot q$ folgt $a_1 = a_2 \cdot \frac{1}{q}$, somit $a_1 = \frac{2000 \cdot 5}{4} = 2500$ und demnach $a_n = 2500 \cdot (\frac{4}{5})^{n-1}$.

B 21

Auch bei geometrischen Folgen lassen sich Partialsummen bilden. Betrachten wir noch einmal das Beispiel von der „Erfindung des Schachspiels“. Für die entsprechende geometrische Zahlenfolge $(a_n) = 1; 2; 4; 8; 16; 32; \dots; 2^{n-1}$ erhält man zum Beispiel folgende Partialsummen:

$$\begin{array}{lll} s_1 = 1 & = 1 & = 1 \\ s_2 = 1 + 2 & = 1 + 1 \cdot 2 & = 3 \\ s_3 = 1 + 2 + 4 & = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 & = 7 \\ s_4 = 1 + 2 + 4 + 8 & = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 & = 15 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{64} = 1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{63} & = 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2^2 + \dots + 1 \cdot 2^{63} & \approx 1,8 \cdot 10^{19} \end{array}$$

Genau ergibt sich nach mühevoller Rechenarbeit $s_{64} = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$.

¹⁾ Das geometrische Mittel zweier positiver Zahlen a und b ist $\sqrt{a \cdot b}$. Der Name „geometrisches Mittel“ erklärt sich aus folgendem Sachverhalt: Wenn a und b Maßzahlen der Länge von Rechteckseiten sind, so ist $\sqrt{a \cdot b}$ die Maßzahl der Seitenlänge eines Quadrats, das den gleichen Flächeninhalt wie das betrachtete Rechteck hat.

Zu einer Formel für die n-te Partialsumme einer (allgemeinen) geometrischen Zahlenfolge (a_n) mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ führt folgende Überlegung. Es gilt:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 & &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 & &= a_1 + a_1 q \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 & &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 & &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 \\ &\vdots & & \\ s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n & &= a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \end{aligned}$$

Wir multiplizieren diese n-te Partialsumme s_n mit q und subtrahieren das Produkt $q \cdot s_n$ von s_n . Also:

$$\begin{array}{rcl} s_n & = & a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{n-2} + a_1 q^{n-1} \\ q \cdot s_n & = & a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + a_1 q^4 + \dots + a_1 q^{n-1} + a_1 q^n \\ \hline s_n - q \cdot s_n & = & a_1 - a_1 q^n \\ s_n(1 - q) & = & a_1(1 - q^n) \end{array}$$

Bei Division beider Seiten der Gleichung durch $(1 - q)$ (mit $q \neq 1$) folgt daraus

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{bzw. bei Erweiterung mit } (-1) \quad s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

B 4

Satz B 4: Partialsumme einer geometrischen Zahlenfolge

Ist $(a_n) = a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$ eine geometrische Zahlenfolge, so gilt für deren n-te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^n a_1 q^{k-1} = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (q \neq 1).$$

Die Gültigkeit dieser Summenformel kann mithilfe des Verfahrens der vollständigen Induktion bewiesen werden.

B 22

Beispiel B 22:

Man ermittle für die geometrische Zahlenfolge (a_n) mit $a_1 = -1$ und $q = -2$

a) die explizite Bildungsvorschrift, b) das Folgeglied a_8 , c) die Partialsumme s_{10} .

Lösung:

a) Wegen $a_1 = -1$ und $q = -2$ gilt nach Satz B 3: $a_n = (-1) \cdot (-2)^{n-1}$.

b) Für $n = 8$ folgt somit $a_8 = (-1) \cdot (-2)^7 = 128$.

c) Für s_{10} gilt nach Satz B 4 $s_{10} = \sum_{k=1}^{10} (-1) \cdot (-2)^{k-1} = (-1) \cdot \frac{(-2)^{10} - 1}{-2 - 1} = 341$.

B 23

Beispiel B 23:

Man stelle eine Formel für die Summe der ersten n ($n \in \mathbb{N}^*$) Potenzen von 3 auf.

Lösung: $a_1 = 3$; $q = 3 \Rightarrow s_n = 3 \cdot \frac{3^n - 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 3)$

Die Erkenntnisse über geometrische Zahlenfolgen lassen sich für die Bearbeitung vielfältiger praktischer Probleme anwenden.

Banken und Sparkassen gewähren Kapitalanlegern in der Regel einmal im Jahr (meist am Jahresende) Zinsen. Diese Zinsen werden in der nächsten Zinsperiode dem Kapital zugeschlagen und mit verzinst. Man spricht von so genannten *Zinseszinsen*.

Beispiel B 24:

Ein Bankkunde lässt ein Kapital von 5000 € für 3 Jahre bei einem Zinssatz von 4 % auf seinem Konto. Auf wie viel Euro ist sein Kapital nach genau 3 Jahren angewachsen?

Lösung:

Bekannt ist das Anfangskapital $K_0 = 5000$ €, der Zinssatz $p \% = 4 \%$ sowie die Laufzeit $n = 3$ Jahre. Bestimmt werden soll das Endkapital K_3 nach 3 Jahren.

Anfangskapital: $K_0 = 5000$ €

Kapital nach einem Jahr: $K_1 = 5000 \text{ €} + \frac{5000 \cdot 4}{100} \text{ €} = 5000 \text{ €} + 200 \text{ €} = 5200 \text{ €}$

Kapital nach zwei Jahren: $K_2 = 5200 \text{ €} + \frac{5200 \cdot 4}{100} \text{ €} = 5200 \text{ €} + 208 \text{ €} = 5408 \text{ €}$

Kapital nach drei Jahren: $K_3 = 5408 \text{ €} + \frac{5408 \cdot 4}{100} \text{ €} = 5408 \text{ €} + 216,32 \text{ €} = 5624,32 \text{ €}$

Nach einer Laufzeit von genau 3 Jahren beträgt das Endkapital rund 5624 €.

Auf die Art und Weise wie in Beispiel B 24 auch für größere Laufzeiten das Endkapital zu ermitteln erfordert einen unverhältnismäßig hohen Aufwand. Zu einem eleganteren Lösungsweg gelangt man, wenn man die Folge der Jahreskapitalbeträge $(a_n) = 5000; 5200; 5408; 5624,22; \dots$ näher betrachtet: Es lässt sich feststellen, dass es sich hierbei wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \approx 1,04$ vermutlich um eine geometrische Zahlenfolge handelt. Durch folgende allgemeine Überlegungen gelangt man zu einer einfachen Formel für die Berechnung von Zinseszinsen bei einem Anfangskapital K_0 :

Kapital

- nach einem Jahr: $K_1 = K_0 + \frac{K_0 \cdot p}{100} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_0 \cdot q$
- nach zwei Jahren: $K_2 = K_1 + \frac{K_1 \cdot p}{100} = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_1 \cdot q = K_0 \cdot q^2$
- nach drei Jahren: $K_3 = K_2 + \frac{K_2 \cdot p}{100} = K_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_2 \cdot q = K_0 \cdot q^3$
- ⋮
- nach n Jahren: $K_n = K_{n-1} + \frac{K_{n-1} \cdot p}{100} = K_{n-1} \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K_{n-1} \cdot q = K_0 \cdot q^n$

Es entsteht (wie vermutet) eine geometrische Folge mit dem Anfangsglied $a_1 = K_0$ und dem Quotienten $q = 1 + \frac{p}{100}$ (*Aufzinsfaktor* genannt). $K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$ heißt die *Zinseszinsformel*.

Bezogen auf das Beispiel B 24 kann man nun das Endkapital nach z. B. 10 Jahren einfach berechnen:

$$K_{10} = 5000 \text{ €} \cdot \left(1 + \frac{4}{100}\right)^{10} = 5000 \cdot 1,04^{10} \text{ €} \approx 7401,22 \text{ €}$$

Beispiel B 25:

Bei folgenden Zinseszinsaufgaben wird jährliche Verzinsung angenommen:

- a) Welches Kapital ergibt sich, wenn 4000 € genau 10 Jahre mit 5 % verzinst werden?
- b) Zu wie viel Prozent Zinsen war ein Kapital von 80 000 € ausgeliehen, das nach genau 3 Jahren ein Endkapital von 91 293,29 € aufwies?
- c) Nach wie viel Jahren hat sich ein Kapital K_0 verdoppelt, für das durchgehend 8,75 % gewährt wird?
- d) Wie hoch muss ein Kapital sein, damit es bei einer festen Verzinsung von 6 % nach genau 10 Jahren die Höhe von 12 000 € erreicht hat?

Lösungen:

a) Durch Anwendung der Zinseszinsformel erhält man $K_{10} = 4000 \cdot 1,05^{10} \text{ €} \approx 6515,58 \text{ €}$. Das Endkapital beträgt also 6515,58 €.

b) Aus der Zinseszinsformel erhält man $p = 100 \left(\sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$. Damit ergibt sich

$$p = 100 \left(\sqrt[3]{\frac{91293,29}{80000}} - 1 \right) \approx 4,5. \text{ Das ausgeliehene Kapital war mit 4,5 \% verzinst.}$$

c) Mittels der Formel $n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln \left(1 + \frac{p}{100} \right)}$ und wegen des Endkapitals $K_n = 2K_0$ erhält man:

$$\frac{\ln 2K_0 - \ln K_0}{\ln 1,0875} = \frac{\ln 2 \frac{K_0}{K_0}}{\ln 1,0875} = \frac{\ln 2}{\ln 1,0875} \approx 8,26.$$

Nach etwa $8\frac{1}{4}$ Jahren verdoppelt sich unter den angegebenen Bedingungen das Kapital.

d) Nach der Formel $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{p}{100} \right)^n}$ erhält man $K_0 = \frac{12000}{1,06^{10}} \text{ €} \approx 6700,73 \text{ €}$.

Man müsste also etwa 6700 € anlegen, damit das Guthaben unter den angegebenen Bedingungen nach 10 Jahren auf 12 000 € angewachsen ist.

Neben *Wachstumsprozessen* lassen sich auch *Zerfallsprozesse* mithilfe von Folgen beschreiben und einer rechnerischen Bestimmung zugänglich machen.

B 26**Beispiel B 26:**

Durch Kernzerfall verringert sich die Masse des radioaktiven Isotops Iod 131 pro Tag um 9,5 %. Mit anderen Worten: Die Masse an einem bestimmten Tag ist jeweils gerade 90,5 % der Masse des Vortages.

- Welche Masse an Iod 131 ist nach 1 Tag, nach 2, 3, 4 bzw. 5 Tagen von den ursprünglich 1000 mg noch vorhanden?
- Der Zerfallsprozess lässt sich durch eine geometrische Folge beschreiben. Die rekursive und explizite Darstellung ist anzugeben.
- Nach wie viel Tagen ist aufgrund des Kernzerfalls nur die Hälfte der Ursprungsmasse vorhanden (so genannte Halbwertszeit)?

Lösung:

zu a): Die vorhandene Masse an den ersten fünf Tagen ist:

$$a_1 = 1000 \text{ mg} \quad a_2 = 1000 \text{ mg} \cdot \frac{90,5}{100} \approx 905 \text{ mg} \quad a_3 = 905 \text{ mg} \cdot \frac{90,5}{100} \approx 819,0 \text{ mg}$$

$$a_4 = 819 \text{ mg} \cdot \frac{90,5}{100} \approx 741,2 \text{ mg} \quad a_5 = 741,2 \text{ mg} \cdot \frac{90,5}{100} \approx 670,8 \text{ mg}$$

zu b): Mit $a_1 = 1000 \text{ mg}$ und $q = 0,905$ erhält man die

- rekursive Darstellung: $a_{n+1} = 0,905 \cdot a_n$
- explizite Darstellung: $a_n = 1000 \cdot 0,905^{n-1}$

zu c): Zu bestimmen ist n für $a_n = \frac{a_1}{2}$:

Aus $\frac{a_1}{2} = a_1 \cdot q^{n-1}$ folgt nach Division durch a_1 und Logarithmieren

$$\ln \frac{1}{2} = \ln q^{n-1} \text{ bzw. (nach den Logarithmengesetzen) } \ln 0,5 = (n-1) \cdot \ln q.$$

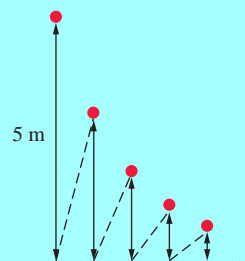
$$\text{Also: } n-1 = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,905} \approx 6,94 \text{ und damit } n \approx 8.$$

Das heißt also: Etwa nach dem 8. Tag ist die Ausgangsmasse auf die Hälfte zerfallen. Mit anderen Worten: Die Halbwertszeit von Iod 131 beträgt 8 Tage.

Beispiel B 27:

Ein Ball wird vom Boden aus bis zu einer Höhe von 5 m hochgeworfen. Nach jedem Aufprall erreicht er jeweils nur noch 60 % der vorherigen Höhe.

- Bestimme die ersten 4 Glieder der durch die Weglängen zwischen dem Auftippen des Balles bestimmten Folge!
- Welchen Weg legt der Ball bis zum 4. Aufprall (allgemein: n -ten Aufprall) zurück?



B 27

Lösung:

zu a): Die Weglängen bilden eine geometrische Folge mit $a_1 = 10$ m und $q = 0,6$, also:

$$a_2 = 6 \text{ m}, a_3 = 3,6 \text{ m} \text{ und } a_4 = 2,16 \text{ m}; \text{ allgemein: } a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 10 \cdot 0,6^{n-1}$$

zu b): Es ist $s_1 = a_1 = 10$

$$s_2 = a_1 + a_2 = 16 \text{ m}$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 19,6 \text{ m}$$

$$s_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 21,76 \text{ m}$$

Allgemein:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}, \quad q \neq 1, \text{ also: } s_n = 10 \cdot \frac{1-0,6^n}{1-0,6} = 10 \cdot \frac{1-0,6^n}{0,4} = 25 \cdot (1-0,6^n)$$

B 2 Konvergenz von Zahlenfolgen

B 2.1 Grenzwert einer Zahlenfolge

Für die Folgen (a_n) , (b_n) und (c_n) mit $a_n = \frac{2 \cdot n + 3}{n}$, $b_n = \frac{n-1}{n}$ und $c_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) soll untersucht werden, wie sich die Folgenglieder bei wachsendem n verhalten. Einen ersten Überblick vermittelt die grafische Darstellung dieser Zahlenfolgen (Fig. B 7a, b, c)¹⁾.

a) $(a_n) = \left(\frac{2 \cdot n + 3}{n}\right)$

b) $(b_n) = \left(\frac{n-1}{n}\right)$

c) $(c_n) = \left((-1)^n \cdot \frac{1}{n}\right)$

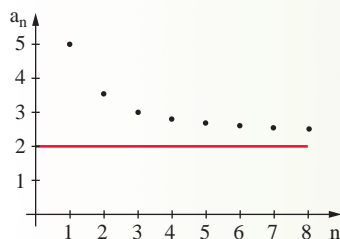


Fig. B 7a

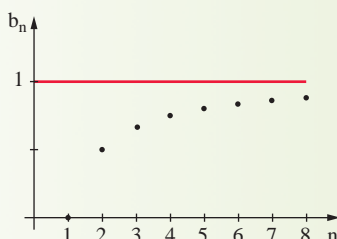


Fig. B 7b

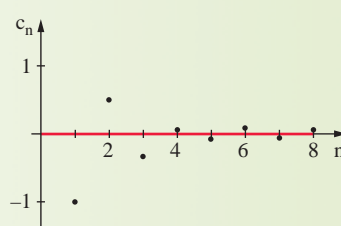


Fig. B 7c

Wie erkennbar ist, nähern sich die Glieder der drei Zahlenfolgen für wachsendes n offenbar jeweils einer bestimmten Zahl – und zwar (a_n) der Zahl 2, (b_n) der Zahl 1 und (c_n) der Zahl 0 (wovon man sich durch Berechnen weiterer Folgenglieder überzeugen kann). Man sagt: Die Folge (a_n) strebt mit

¹⁾ Für Zahlenfolgen mit einem komplizierteren Bildungsgesetz kann es u. U. zeitsparend sein, sich einen ersten Überblick durch deren Darstellung auf dem GTA-Bildschirm zu verschaffen.

wachsendem n gegen den *Grenzwert* $g = 2$. Um diesen Grenzwertbegriff mathematisch exakt fassen zu können, vor allem aber, um die Möglichkeit zu erhalten, den Grenzwert einer Zahlenfolge zu berechnen, muss man die der Anschauung entnommene Formulierung, dass die Glieder einer Zahlenfolge *einer bestimmten Zahl beliebig nahe kommen*, präzisieren.

Wir betrachten dazu noch einmal die Folge $(b_n) = (\frac{n-1}{n})$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
b_n	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{10}{11}$

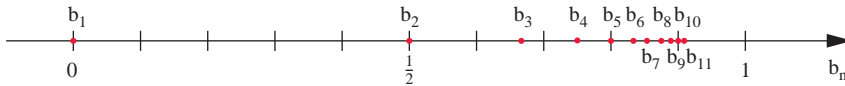


Fig. B 8

Die „Nähe“ eines Zahlenfolgliedes b_n zum vermutlichen Grenzwert $g = 1$ wird dabei durch den Abstand $|b_n - g|$ bestimmt. Der Darstellung ist zu entnehmen, dass ab $n > 10$ dieser Abstand kleiner als $\frac{1}{10}$ ist. Nur die ersten zehn Zahlenfolglieder haben einen Abstand von $g = 1$, der größer oder gleich $\frac{1}{10}$ ist. Für das n -te Zahlenfolglied ist der Abstand von $g = 1$

$$|b_n - g| = \left| \frac{n-1}{n} - 1 \right| = \left| \frac{n-1-n}{n} \right| = \left| -\frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n}.$$

Damit lässt sich nun bestimmen, welche und wie viele Zahlenfolglieder von (b_n) einen Abstand kleiner als $\frac{1}{100}$ von $g = 1$ haben. Wir sehen: $|b_n - g| = \frac{1}{n} < \frac{1}{100}$ ist für alle $n > 100$ erfüllt. Man sagt: Alle Folglieder ab $n = 101$ liegen in einer $\frac{1}{100}$ -Umgebung von 1. Nur die ersten 100 Folglieder liegen außerhalb dieser Umgebung.

Wie klein man nun eine positive Zahl ε (z. B. $\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10000}$, $\frac{1}{100000}$, ...) auch wählt, stets gibt es *unendlich viele* Zahlenfolglieder, deren Abstand von g kleiner als das vorgegebene ε ist. Nur endlich viele Zahlenfolglieder haben von g einen größeren Abstand. In der Mathematik verwendet man dafür den Begriff „ ε -Umgebung“ und die Sprechweise: „In jeder (noch so kleinen) ε -Umgebung von g liegen fast alle Glieder¹⁾ der Zahlenfolge.“

B 7

Definition B 7:

Ist g eine beliebige reelle Zahl und ε eine beliebige (kleine) positive reelle Zahl, so nennt man das offene Intervall $U_\varepsilon(g) =]g - \varepsilon; g + \varepsilon[$ die **ε -Umgebung** der Zahl g .

Die Fig. B 9a, b veranschaulichen diesen Sachverhalt noch einmal:

a) Auf der Zahlengeraden

b) Im rechtwinkligen Koordinatensystem

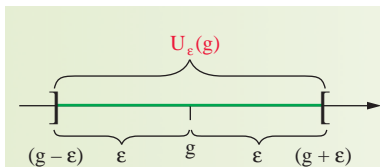


Fig. B 9a

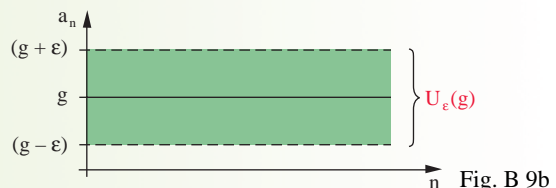


Fig. B 9b

¹⁾ Die Formulierung „fast alle Elemente“ (einer unendlichen Menge) bedeutet: „Alle Elemente bis auf endlich viele Ausnahmen.“

Auf dieser Grundlage kann nun der Grenzwertbegriff exakt definiert werden:

Definition B 8:

Die Zahl g heißt **Grenzwert der Zahlenfolge** (a_n) , wenn für jede (noch so kleine) positive Zahl ε fast alle Zahlenfolglieder a_n in der ε -Umgebung von g – in Kurzform: $U_\varepsilon(g)$ – liegen, wenn also die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ ab einem bestimmten n erfüllt ist.

B 8

Den Inhalt der Definition B 8 veranschaulicht Fig. B 10. Ab einem gewissen n liegen die Punkte, welche die Folglieder darstellen, in einem Streifen der Breite 2ε , dessen Mittellinie parallel zur n -Achse durch g verläuft.

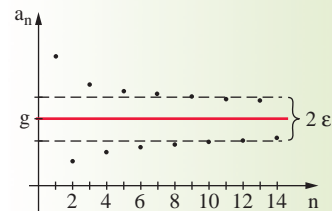


Fig. B 10

Oder anders ausgedrückt: Hat eine Zahlenfolge (a_n) den Grenzwert g , so ist ab einem bestimmten Glied a_{n_0} der Zahlenfolge der Abstand aller Folglieder von g kleiner als ε .

Folgen, die einen Grenzwert besitzen, bezeichnet man als **konvergent**. Folgen ohne Grenzwert heißen **divergent**. Um auszudrücken, dass „die Folge (a_n) den Grenzwert g hat“, verwendet man die Kurzschreibweise

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \quad (\text{gelesen: Limes}^1 \text{ von } (a_n) \text{ für } n \text{ gegen unendlich gleich } g).$$

Existiert der Grenzwert einer Zahlenfolge, so ist er eindeutig bestimmt (s. Aufgabe BA 109). Mit der Definition B 8 haben wir ein Mittel in der Hand, den Grenzwertnachweis rechnerisch zu erbringen.

Beispiel B 28:

Die Zahlenfolge $(\frac{n+3}{2n})$ ist **auf Konvergenz zu untersuchen**. Wir ermitteln zunächst einige Glieder der Zahlenfolge, um ggf. eine Vermutung bezüglich des Grenzwerts zu finden:

$$(\frac{n+3}{2n}) = \frac{4}{2}; \frac{5}{4}; \frac{6}{6}; \frac{7}{8}; \frac{8}{10}; \dots; \frac{103}{200}; \dots; \frac{1003}{2000}; \dots$$

Der Grenzwert könnte $\frac{1}{2}$ sein. Um die Konvergenz zu zeigen, muss nach Definition B 8 bewiesen werden, dass für fast alle n die Ungleichung $|\frac{n+3}{2n} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ gilt. Wir gehen wie folgt vor:

$$(1) \text{ Die Ungleichung wird vereinfacht: } \left| \frac{n+3}{2n} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{n+3}{2n} - \frac{n}{2n} \right| = \left| \frac{3}{2n} \right| = \frac{3}{2n}, \text{ denn } n \geq 1.$$

Die Ungleichungen $|\frac{n+3}{2n} - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ und $\frac{3}{2n} < \varepsilon$ sind also gleichwertig.

$$(2) \text{ Wir formen weiter um und schätzen ab: } \frac{3}{2n} < \varepsilon \Rightarrow 3 < \varepsilon \cdot 2n, \text{ also } n > \frac{3}{2\varepsilon}.$$

Wählt man also beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{10}$, so ist $n > 15$. Das bedeutet: 15 Glieder der Zahlenfolge $(\frac{n+3}{2n})$ liegen außerhalb $U_{\frac{1}{10}}(\frac{1}{2})$, alle anderen aber innerhalb. Mit anderen Worten:

Nur die ersten 15 Glieder haben von $\frac{1}{2}$ einen Abstand, der größer (oder höchstens gleich) $\frac{1}{10}$ ist; alle folgenden Glieder liegen näher an $\frac{1}{2}$.

B 28

¹⁾ limes (lat.)– Grenze

Ist $\varepsilon = \frac{1}{100}$, so erhält man $n > 150$. Das heißt: 150 Glieder der Folge liegen außerhalb $U_{\frac{1}{100}}(\frac{1}{2})$, aber fast alle innerhalb dieser ε -Umgebung.

- (3) Die entscheidende Frage ist also, ob es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl n gibt, die größer als $\frac{3}{2\varepsilon}$ ist. Offensichtlich ist das stets der Fall: Auch wenn ε beliebig klein gewählt wird und demzufolge für $\frac{3}{2\varepsilon}$ ein sehr großer Wert entsteht, erhält man wegen der Unendlichkeit der Folge der natürlichen Zahlen doch stets eine Zahl n , so dass ab dem Glied a_{n+1} alle weiteren Folgenglieder näher als ε an $g = \frac{1}{2}$ liegen.

Damit wurde gezeigt, dass die Zahlenfolge $(\frac{n+3}{2n})$ konvergent ist und den Grenzwert $\frac{1}{2}$ besitzt.

B 29

Beispiel B 29:

Wir betrachten die Folgen $(a_n) = (2^{n-1})$ und $(b_n) = ((-1)^n \cdot \frac{n+1}{n})$.

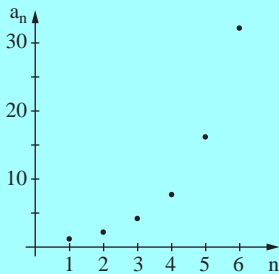


Fig. B 11

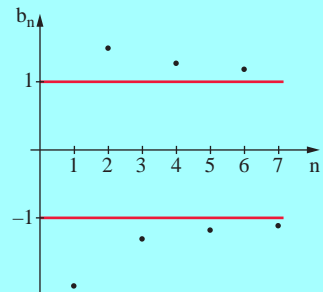


Fig. B 12

Den grafischen Darstellungen dieser Folgen in Fig. B 11 und B 12 kann man entnehmen: Bei der Folge (a_n) gibt es keine Zahl g , der sich die Glieder mit wachsendem n beliebig dicht annähern. Die Folge (a_n) ist also *divergent*.

Man schreibt in einem solchen Fall $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$. Damit ist gemeint, dass es zu jeder noch so großen Zahl K ein n gibt, von dem ab alle Folgenglieder größer als K sind.

Bei der Folge (b_n) nähern sich die Glieder mit wachsendem n für gerade n der Zahl 1, für ungerade n aber der Zahl -1 . Das ist aber ein Widerspruch zu der Aussage über Existenz und notwendige Eindeutigkeit des Grenzwerts einer Zahlenfolge (s. Aufgabe BA 109). Auch die Folge (b_n) ist demzufolge *divergent*. Man nennt die Zahlen -1 und 1 **Häufungswerte** der Zahlenfolge.

Für arithmetische und geometrische Zahlenfolgen lassen sich die Konvergenzaussagen vereinfachen:

- a) Jede arithmetische Zahlenfolge (a_n) mit $d \neq 0$ ist *divergent*.
- b) Jede geometrische Zahlenfolge mit $|q| < 1$ ist *konvergent* und hat den Grenzwert 0.

Zahlenfolgen, deren Glieder bei wachsendem n alle Schranken übertreffen (z. B. $(\frac{n^2}{2})$ oder $(4n^2 + 5n + 7)$), und Zahlenfolgen, deren Glieder bei wachsendem n unter alle Schranken sinken (z. B. $(10 - n^2)$), nennt man **bestimmt divergent**. In solchen Fällen schreibt man $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ bzw. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ und spricht dann von **uneigentlichen Grenzwerten**. Das ist natürlich nur eine symbolische Bezeichnung und bedeutet nicht, dass eine solche Zahlenfolge tatsächlich einen Grenzwert hat, also gegen eine Zahl konvergiert.

B 2.2 Grenzwertsätze für Zahlenfolgen

Um das Bestimmen von Grenzwerten zu erleichtern, versucht man, gegebene Zahlenfolgen auf einfachere Zahlenfolgen mit bekannten Grenzwerten zurückzuführen. Dabei spielen Zahlenfolgen eine besondere Rolle, die den Grenzwert 0 besitzen.

Definition B 9:

Eine Zahlenfolge, die den Grenzwert $g = 0$ besitzt, heißt **Nullfolge**.

B 9

Nullfolgen sind also Zahlenfolgen, die gegen 0 konvergieren, z. B. $(\frac{1}{n})$; $(\frac{3}{n^2})$; $(\frac{4}{\sqrt{n}})$; $(\left(\frac{1}{2}\right)^n)$ $(\frac{3}{2n})$.
Es besteht folgender Zusammenhang:

Satz B 5: **Grenzwertkriterium für Zahlenfolgen**

Eine Zahlenfolge (a_n) hat genau dann den Grenzwert g , wenn die Zahlenfolge $(a_n - g)$ eine Nullfolge ist.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$$

B 5

Beweis:

Es ist eine Äquivalenzaussage zu beweisen – der Beweis muss also „in beiden Richtungen“ geführt werden.

I. Beweisen wir zunächst $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$.

- (1) Da (a_n) konvergent ist, also ein Grenzwert g existiert, gilt nach Definition B 9 für fast alle a_n die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$.
- (2) Offensichtlich gilt dann auch für fast alle a_n die Ungleichung $|(a_n - g) - 0| < \varepsilon$, denn die Betragsungleichungen $|a_n - g| < \varepsilon$ und $|(a_n - g) - 0| < \varepsilon$ sind identisch.
- (3) Daraus folgt aber nach Definition B 9, dass die Zahlenfolge $(a_n - g)$ den Grenzwert 0 hat. Die Zahlenfolge $(a_n - g)$ ist also Nullfolge.

II. Wegen der Identität der beiden Betragsungleichungen in (2) kann der Beweisgang auch in „umgekehrter Richtung“ erfolgen. Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$ und zusammen mit I. die behauptete Äquivalenz. w. z. b. w.

Beispiel B 30:

Wir greifen das Beispiel B 28 noch einmal auf und zeigen jetzt mithilfe von Satz B 5, dass die Zahlenfolge $(\frac{n+3}{2n})$ gegen $\frac{1}{2}$ **konvergiert**. Dazu müssen wir nachweisen, dass die Zahlenfolge $(\frac{n+3}{2n} - \frac{1}{2})$ eine Nullfolge ist. Dies trifft zu, denn es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n} - \frac{1}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3-n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{2n} = 0$$

B 30

Den Zusammenhang zwischen monotonen, beschränkten und konvergenten Zahlenfolgen kann durch folgenden Satz ausgedrückt werden.

Satz B 6:

Jede monotone und beschränkte Zahlenfolge (a_n) ist konvergent.

B 6

Aus den Zahlenfolgen $(a_n) = (\frac{2n+3}{n})$ bzw. $(a_n) = 5; \frac{7}{2}; 3; \frac{11}{4}; \frac{13}{5}; \dots; \frac{2n+3}{n}; \dots$ und $(b_n) = (\frac{n-1}{n})$ bzw. $(b_n) = 1; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; \frac{n-1}{n}; \dots$ erhält man durch gliedweise Addition die Folge $(a_n + b_n) = 6; 4; \frac{11}{3}; \frac{7}{2}; \frac{17}{5}; \dots; \frac{3n+2}{n}; \dots$. Die Folgen (a_n) und (b_n) sind konvergent. Ihre Grenzwerte wurden in Beispiel B 28 untersucht. Es gilt $g_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{n} = 2$ und $g_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} = 1$. Daher liegt die Vermutung nahe, dass sich der Grenzwert g von $(a_n + b_n)$ aus der Addition von g_1 und g_2 ergibt, dass also $g = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+2}{n} = 3$ gilt. Analog kann man aus (a_n) und (b_n) durch gliedweise Subtraktion, Multiplikation und Division bei Beachtung der notwendigen Einschränkungen neue Folgen bilden und dieselben Betrachtungen durchführen. Über das Konvergenzverhalten von zusammengesetzten Zahlenfolgen lassen sich folgende Aussagen treffen:

B 7

Satz B 7: Grenzwertsätze für Zahlenfolgen

Die Zahlenfolge (a_n) konvergiere gegen g_1 , die Zahlenfolge (b_n) gegen g_2
(d. h. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2$).

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_1 \pm g_2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_1 \cdot g_2,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{g_1}{g_2} \quad (\text{sofern } b_n \neq 0 \text{ und } g_2 \neq 0).$$

Beweis für den Fall der Grenzwertsumme:

- Voraussetzung: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2$
- Behauptung: $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_1 + g_2$
- Beweis: Nach Definition B 9 ist zu zeigen, dass für jedes reelle $\varepsilon > 0$ fast alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $|(a_n + b_n) - (g_1 + g_2)| < \varepsilon$ erfüllen.
 - $\varepsilon > 0$ sei beliebig (klein) gewählt. Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1$ gilt nach Definition B 9 die Ungleichung $|a_n - g_1| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n .
Anmerkung: Da die Ungleichung für jede reelle Zahl gilt, kann man für diese natürlich auch $\frac{\varepsilon}{2}$ schreiben. Wir haben also in Kenntnis des Beweiszieles eine „kosmetische Aufbereitung“ vorgenommen.
 - Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g_2$ gilt nach Definition B 9 auch die Ungleichung $|b_n - g_2| < \frac{\varepsilon}{2}$ für fast alle n .
 - Nach der Dreiecksungleichung ($|a + b| \leq |a| + |b|$ für $a, b \in \mathbb{R}$) und dem oben Ausgeführten folgt: $|(a_n + b_n) - (g_1 + g_2)| = |(a_n - g_1) + (b_n - g_2)| \leq |a_n - g_1| + |b_n - g_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$
gilt für fast alle n . w. z. b. w.

Auf die Beweise der weiteren Aussagen des Satzes B 7 soll hier verzichtet werden.

Bemerkungen:

- Die Grenzwertsätze sind nur anwendbar, wenn die einzelnen Grenzwerte existieren.
- Die Umkehrungen dieser Sätze sind nicht allgemeingültig. So kann zum Beispiel eine Zahlenfolge $(\frac{a_n}{b_n})$ konvergieren, ohne dass beide Folgen konvergieren (wie Beispiel B 32 zeigen wird).

B 31

Beispiel B 31:

Gegeben seien die Zahlenfolgen $(2 + \frac{1}{n})$ und $(3 - \frac{5}{n})$. Zu untersuchen ist, ob die Zahlenfolge $((2 + \frac{1}{n}) \cdot (3 - \frac{5}{n}))$ konvergiert.

1. Wir untersuchen, ob die Grenzwerte der Zahlenfolgen $(2 + \frac{1}{n})$ und $(3 - \frac{5}{n})$ existieren:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 2 + 0 = 2$. Der Grenzwert existiert, da der Grenzwertsatz für Summenfolgen angewendet werden kann.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{5}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} = 3 - 0 = 3$. Der Grenzwert existiert, da der Grenzwertsatz für Differenzenfolgen angewendet werden kann.

2. Da die Grenzwerte der beiden Zahlenfolgen $(2 + \frac{1}{n})$ und $(3 - \frac{5}{n})$ existieren, kann auf die Folge $((2 + \frac{1}{n}) \cdot (3 - \frac{5}{n}))$ der Grenzwertsatz für Produktfolgen angewendet werden.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(2 + \frac{1}{n}) \cdot (3 - \frac{5}{n})] = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 + \frac{1}{n}) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3 - \frac{5}{n}) = 2 \cdot 3 = 6$$

Die Zahlenfolge $((2 + \frac{1}{n}) \cdot (3 - \frac{5}{n}))$ ist also konvergent und besitzt den Grenzwert 6.

B 32

Beispiel B 32:

Es ist der Grenzwert der Zahlenfolge $(\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3})$ zu ermitteln.

Die Folgen $(4n^2 + 5n + 7)$ und $(5n^2 - n + 3)$ divergieren – sie wachsen monoton, ohne beschränkt zu sein. Die Einzelgrenzwerte $\lim_{n \rightarrow \infty} (4n^2 + 5n + 7)$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (5n^2 - n + 3)$ existieren also nicht. Daher ist die Anwendung des **Grenzwertsatzes** für Quotientenfolgen auf die Folge $(\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3})$ in der vorliegenden Form nicht möglich. In einem solchen Fall kann man vorerst keine Konvergenzaussage treffen. Es darf allerdings auch nicht voreilig geschlussfolgert werden, dass dann die Zahlenfolge $(\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3})$ divergent sei.

Sinnvoll ist, zu versuchen, den Term $\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3}$ so umzuformen, dass im Nenner nur noch kon-

stante Folgen oder Nullfolgen auftreten. Das gelingt meist, indem man im Zähler und Nenner die höchste im Nenner auftretende Potenz von n ausklammert und dann kürzt. Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt so im vorliegenden Fall:

$$\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3} = \frac{n^2 \left(4 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}{n^2 \left(5 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right)} = \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}}$$

Auf diesen umgeformten Quotienten sind die Grenzwertsätze anwendbar. Es gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{5}{n} + \frac{7}{n^2}}{5 - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 4 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2}} = \frac{4 + 0 + 0}{5 - 0 + 0} = \frac{4}{5}$$

Damit haben wir nachgewiesen, dass die Zahlenfolge $(\frac{4n^2 + 5n + 7}{5n^2 - n + 3})$ konvergent ist und den Grenzwert $\frac{4}{5}$ besitzt.

B 3 Reihen

Während man zwei, drei, einhundert, auch eine Million Zahlen aufsummieren kann, ist die Addition von *unendlich vielen* Zahlen im herkömmlichen Sinn nicht möglich. Auf Probleme im Umgang mit solchen „Summen“ mit unendlich vielen Summanden macht das folgende Beispiel aufmerksam:

B 33

Beispiel B 33:

Man berechne

a) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1$ b) $1 + (-1) + 1 + (-1) + 1 + (-1) + \dots$ (Reihe von G. GRANDI)¹⁾

Zu a) Diese endliche Summe kann problemlos ermittelt werden und beträgt 1.

Zu b) Diese „unendliche Summe“ lässt zwei verschiedene Ergebnisse zu. Je nach Klammer-
setzung von benachbarten Gliedern erhält man

$$\begin{aligned} [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + [1 + (-1)] + \dots &= 0 + 0 + 0 + \dots = 0 \quad \text{oder} \\ 1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \dots &= 1 + 0 + 0 + \dots = 1. \end{aligned}$$

Offenbar darf man eine Summe mit unendlich vielen Gliedern nicht wie eine Summe mit endlich vielen Gliedern behandeln. Die Bemühungen, diese Schwierigkeiten zu umgehen, führten in der Mathematik zur Entstehung des Begriffs „**unendliche Reihe**“. Zu einer unendlichen Reihe kommt man, indem man von einer unendlichen Zahlenfolge a_1, a_2, a_3, \dots ausgeht. Die Summe aller a_k lässt sich nicht berechnen, da es unendlich viele sind, jedoch kann man Partialsummen bilden:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 = \sum_{k=1}^1 a_k; & s_2 &= a_1 + a_2 = \sum_{k=1}^2 a_k; & s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 = \sum_{k=1}^3 a_k; \\ s_4 &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{k=1}^4 a_k; & \dots; & & s_n &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k; \quad \dots \end{aligned}$$

und über die Folge der Partialsummen (s_n) zu einer Lösung des Problems zu gelangen versuchen:

B 34

Beispiel B 34:

Aus der Nullfolge $(\frac{1}{2^{n-1}}) = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \dots$ sei durch fortgesetzte Addition eine Partialsummenfolge $(s_n) = s_1; s_2; s_3; \dots$ aufgebaut, die untersucht werden soll.

Die Glieder heißen also

$$(s_n) = 1; 1 + \frac{1}{2}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}; \dots = 1; \frac{3}{2}; \frac{7}{4}; \frac{15}{8}; \frac{31}{16}; \frac{63}{32}; \dots; 2 - \frac{1}{2^{n-1}}; \dots$$

Schon aus der Veranschaulichung dieser Partialsummenfolge in Fig. B 13 stellt man fest: Je mehr Glieder der Partialsummenfolge ermittelt werden, umso weniger unterscheiden sie sich von der Zahl 2. Sie kommen also der Zahl 2 beliebig nahe.

Die Partialsummenfolge $(2 - \frac{1}{2^{n-1}})$ ist konvergent, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - \frac{1}{2^{n-1}}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$$

Diesen Grenzwert der Partialsummenfolge interpretiert man als „Summe“ der unendlich vielen Glieder der Folge $(\frac{1}{2^{n-1}})$.

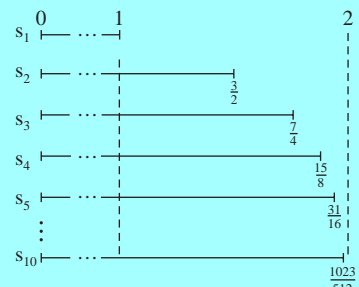


Fig. B 13

¹⁾ G. GRANDI (1671–1742); italienischer Mathematiker und Theologe.
Er nahm an, dass $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 \pm \dots = \frac{1}{2}$ gilt.

Definition B 10:

Ist $(a_n) = a_1; a_2; a_3; a_4; \dots$ eine Zahlenfolge, so heißt $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$ **unendliche Reihe** oder kurz **Reihe**. Man schreibt dafür $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und versteht darunter die Folge der Partialsummen $(s_n) = (\sum_{k=1}^n a_k) = a_1; a_1 + a_2; a_1 + a_2 + a_3; \dots$. Für den Fall der Konvergenz der Partialsummenfolge (s_n) heißt ihr Grenzwert g der **Wert** oder die **Summe der Reihe**.

Eine Reihe nennt man konvergent bzw. divergent, je nachdem ob die entsprechende Partialsummenfolge konvergiert oder divergiert.

B 10

Bemerkung:

Das Symbol $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ hat zwei Bedeutungen:

- Es bezeichnet die Reihe, legt also die Bildung der Folge (s_n) der Partialsummen fest.
- Es bezeichnet zugleich die „Summe“ dieser Reihe, also den Grenzwert der Partialsummenfolge (s_n) und ist demzufolge keine Summe im üblichen Sinn.

Beispiel B 35:

Es ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ auf Konvergenz zu untersuchen. Dazu betrachtet man die

Folge (s_n) der Partialsummen mit $s_n = \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$. Wegen $\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)} - \frac{1}{(n+2)}$ gilt $s_n = (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) + (\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2})$ bzw. $s_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

Die Partialsummenfolge strebt für $n \rightarrow \infty$ also offenbar gegen $\frac{1}{2}$, die Reihe ist konvergent – ihr

Wert bzw. ihre Summe ist $\frac{1}{2}$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}$

B 35

Beispiel B 36:

Die Zahlenfolge $(\frac{1}{n}) = 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots$, die wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ Nullfolge ist, führt durch fortgesetzte Addition zur so genannten harmonischen Reihe:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{3} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}) + \dots \end{aligned}$$

Wir bilden nun entsprechend den Klammerausdrücken eine Vergleichsreihe, die kleinere Glieder als die harmonischen Reihe besitzt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} &> 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}) + (\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}) + (\frac{1}{32} + \dots) + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Da die Vergleichsreihe durch fortlaufende Addition von $\frac{1}{2}$ divergent ist, ergibt sich, dass die harmonische Reihe „erst recht“ bestimmt divergent ist.

B 36

Ist (a_n) eine arithmetische (geometrische) Folge, so nennt man $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *arithmetische (geometrische) Reihe* (s. auch B 1.3).

Arithmetische Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} (a_1 + (k-1) \cdot d)$ sind wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} (n \cdot a_1 + \frac{n(n-1) \cdot d}{2}) = \pm \infty$ stets divergent und deshalb (weil der Wert solcher Reihen nie existiert) von geringerem Interesse.

Bei **geometrischen Reihen** $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1}$ treten in Abhängigkeit vom Quotienten q alle Fälle des Konvergenzverhaltens auf: Für

- $|q| < 1$ ist die Reihe konvergent,
- $|q| \geq 1$ ist die Reihe divergent.

Insbesondere gilt wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{q - 1} (q^n - 1) = \frac{-a_1}{q - 1} = \frac{a_1}{1 - q}$:

B 8

Satz B 8: Konvergenzkriterium für geometrische Reihen

Die geometrische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 \cdot q^{k-1}$ konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist. Sie hat dann die Summe $s = \frac{a_1}{1 - q}$.

Wegen ihrer vielfältigen Anwendung verdient die geometrische Reihe besondere Beachtung.

B 37

Beispiel B 37:

Unter Verwendung von Satz B 8 kann man einen unendlichen periodischen Dezimalbruch als rationale Zahl in der Form $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$, p und q teilerfremd; $p, q \in \mathbb{Z}$) darstellen.

a) Für den reinperiodischen unendlichen Dezimalbruch $0,\overline{27}$ gilt:

$$0,\overline{27} = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{27}{100} \left(\frac{1}{100}\right)^{k-1} = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}$$

b) Der gemischtperiodische unendliche Dezimalbruch $0,47\overline{72}$ lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} 0,47\overline{72} &= 0,47 + \frac{72}{10000} + \frac{72}{1000000} + \dots = 0,47 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{72}{10000} \left(\frac{1}{100}\right)^{k-1} \\ &= 0,47 + \frac{\frac{72}{10000}}{\frac{99}{100}} = 0,47 + \frac{72}{9900} = \frac{4653}{9900} + \frac{72}{9900} = \frac{4725}{9900} = \frac{21}{44} \end{aligned}$$

B 38

Beispiel B 38:

Die FIBONACCI-Folge (s. S. 37 und Beispiel B 6) besitzt die Anfangsglieder $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_3 = 2$; $a_4 = 3$; $a_5 = 5$; $a_6 = 8$; $a_7 = 13$; $a_8 = 21$; $a_9 = 34$; $a_{10} = 55$; $a_{11} = 89$; $a_{12} = 144$; ...

Bildet man hiervon jeweils die Quotienten zweier aufeinander folgender FIBONACCI-Zahlen

$q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, so ergibt sich 1; 2; 1,5; 1,667; 1,6; 1,625; 1,615(38); 1,619(04); 1,617(64);

1,618(18); 1,617(98); ... Vermutlich konvergiert die Folge der Quotienten gegen 1,618. Falls ein Grenzwert q der Quotientenfolge (q_n) existiert, muss $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} q_{n-1} = q$ sein.

Da $q_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_n + a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} = 1 + \frac{1}{q_{n-1}}$ ist, würde dies $1 + \frac{1}{q} = q$ zur Folge haben.

Daraus erhält man die quadratische Gleichung $q^2 - q - 1 = 0$ mit der Lösung $q_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,618$.

Die Quotientenfolge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ besitzt also tatsächlich den vermuteten Grenzwert. Das heißt: Je weiter man in der Folge fortschreitet, desto genauer trifft die Beziehung $a_{n+1} = 1,618 \cdot a_n$ zu.